毛主席语录

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们：**“知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。”**几年来，成千上万的知识青年，响应毛主席的伟大号召，满怀革命豪情，奔赴祖国的农村和边疆。他们认真读马、列的书，读毛主席的书，积极投入批林整风，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，阶级斗争和路线斗争的觉悟有了很大提高。无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于**“要关怀青年一代的成长”**的教导，为了适应广大下乡上山知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、自然科学的一些基本知识和鲁迅作品选。我们希望，这套丛书的出版，能对下乡上山知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高路线斗争觉悟、政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

一九七三年四月

编者的话

为了帮助广大知识青年学习初等数学知识，我们编写了《代数》与《几何》这两本书.

《代数》包括代数方程、指数、对数、三角函数等知识，同时也介绍了数列、排列组合、复数等内容.《几何》的前半部分介绍了三角形(包括边角计算)和圆，后半部分则属于平面解析几何的内容.

这两本书是互有联系的，必须配合使用. 譬如，可以按照下面的顺序进行自学：先学习《代数》的前四章，再《几何》的前四章，然后《代数》的后五章，最后学习《几何》的后五章.

由于我们的思想水平不高，实践经验又不足，书中一定有许多缺点和错误，请读者批评指正.

《初等数学》编写组

1973年8月

目　录

第一章　代数的初步知识

数，可以分为正数与负数，也可以分为整数、分数与小数，而小数又有有限小数与无限小数的区别．那末，各种数有些什么特征，它们之间又有何种联系？这些是第一节实数中所要讨论的问题．

我们知道，一个数加上一个正数就增大了，减去一个正数就变小了，但是，在有了负数以后，加可能变小，减也可能增大，那末，加与减有些什么关系？同样地，乘与除又有些什么关系？另外，各种数都有自己的计算方法，而数字运算有些什么基本规律？所有这些问题是第二节数字运算的基本规则中所要讨论的内容．

在这个基础上，我们把物理模型译成数学语言，列出含有字母的式子，根据数字运算规则进行推理与演算，以达到为三大革命实践服务的目的．这些构成了其后三节的内容．

这样，通过本章的学习，对于用代数方法解决问题就有初步的了解，同时，本章的内容也为今后的学习做一些必要的准备．

第一节　实　　数

一、整　　数

在社会实践中人们最早认识的数是正整数(自然数)．正

整数按其大小的顺序排列为

$$1, 2, 3, 4, \cdots.$$

对于这些数我们能够进行加和乘的运算，例如，

$$2+3=5$$

表示 2 与 3 之和等于 5，

$$2\times3=6$$

表示 2 的 3 倍等于 6. 特别，一个数乘以 1 仍是这个数本身.

自然界中一切现象都充满着矛盾，上与下、增与减、收入与支出、未来与过去，都是矛盾着的双方，它们相反而又相成. 就数量侧面来说，要表示这些矛盾着的现象，不仅要区分绝对数量的多少，还要辨别意义的正反. 例如，某一天的最高温度是零上 4 度，最低温度是零下 4 度. 就绝对数量来说都是 4 度，而意义有零上与零下的不同. 如何用数来描述这些意义相反的量呢？为此，我们首先区分它们的意义，选定其中一种为正，如零度以上、增加、收入等看做是正的；而与它们相反的，如零度以下、减少、支出等看做是负的. 正的量的前面添上正号“+”，负的量的前面附以负号“−”. 这样，零上 4 度用 +4 表示，零下 4 度用 −4 表示. 为简便起见，通常省掉正数前面的符号，直接地把 +4 记成 4. 这样，我们又认识了负整数.

零，不是正数也不是负数，而是正数与负数的界限，用记号 0 表示. 一个数加零不影响这个数. 例如，从零度开始增加 4 度达到零上 4 度，用加法表示为

$$0+4=4.$$

但是零也有它的确切涵义，例如摄氏零度，在通常情况下，表示水结成冰的一个确定的温度.

对于我们已经提到的数来说，一个数不仅有绝对值的大

小，还有符号的正负．例如，3 与 5 的符号全为正，而绝对值有大小的区分，前者为 3，后者为 5．再如，3 与 -3 的绝对值都是 3，而符号有正负的差别，前者为正，后者为负．至于 0，它没有正负之分，绝对值也就是 0．

正整数、零、负整数的全体称为整数．整数按其大小顺序排列为

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots.$$

这样，我们已把数的范围从正整数扩充到了整数．

为了直观地了解整数，按相等的距离依次地把它们布置在一根直线上．图 1-1 是这种布置的示意图．从图中看出：

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

图 1-1

(1) 正数的对应点在零点的右侧，负数的对应点在零点的左侧；

(2) -3 与 $+3$ 的对应点分布在零的左右两侧，这两点和零点的距离都是 3 个单位距离；

(3) 在这根直线上，任意一点所对应的数，总是大于它左侧的点所对应的数．例如

$$1 \text{ 大于 } -2,$$
$$3 \text{ 大于 } 2,$$
$$-2 \text{ 大于 } -3.$$

换句话说，正数大于负数；对于正数来说，绝对值大的数较大；对于负数来说，绝对值大的数反而较小．

二、有 理 数

有了整数还不能满足描述客观事物数量侧面的实际需

要. 例如，我国人口约占世界人口的四分之一. 这句话的意思是说，如果把世界人口等分为四份，那末我国人口相当于这四份中的一份，这里我们把世界人口作为比较单位看做是1，中国人口约是这个比较单位的"四分之一"(图1-2).

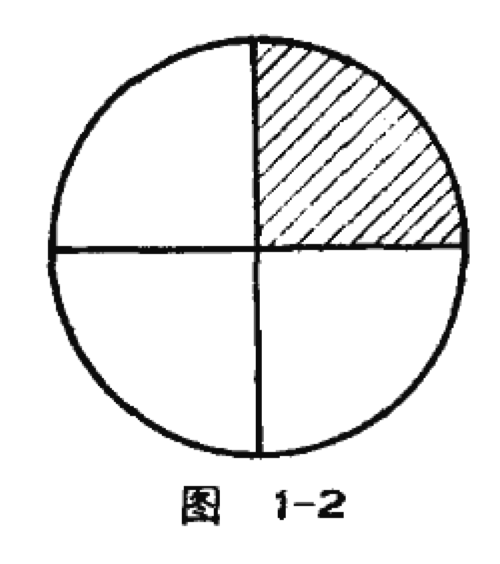


图 1-2

再如，"一段钢材长为三分之二米". 这个意思是说，这段钢材之长是一米的三分之二，如果把一米三等分，这段钢材之长相当于其中的二份之长(图1-3).

"四分之一"、"三分之二"都是不同于整数的另一种数，分别记为$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{3}$.

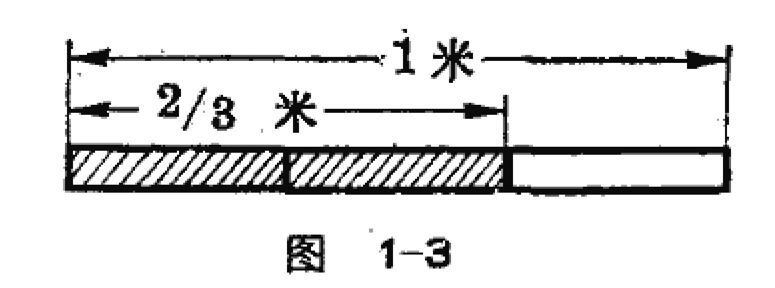


图 1-3

对比较对象进行等分，表示其中一份或几份的数称为分数. 分数通常表示为

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}},$$

其中分子分母都是整数，而分母不可以为零.

等分就是除的意思，分数的记号"——"与除法的记号"÷"是一个意思，所以

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}}=\text{分子}\div\text{分母}.$$

整数可以看作分母是1的分数.

分母为100的分数通常称为百分数，如$\frac{90}{100}$，$\frac{18}{100}$等都是百分数. 习惯上把$\frac{90}{100}$记为90%，$\frac{18}{100}$记为18%，其中"%"是百分数的记号.

根据分数的涵义，四份中的一份与八份中的两份是相等

的，一百份中的五十份与两份中的一份也是相等的，所以

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8},$$

$$\frac{50}{100}=\frac{1}{2},$$

这个结果有普遍意义，可以概括出分数的基本性质：

分子分母同乘或同除以一个不为零的数，这个分数的值不变.

把一个分数化为更为简单的形式的运算称为约分. $\frac{18}{24}$ 约分为 $\frac{3}{4}$，$\frac{50}{100}$ 约分为 $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$ 与 $\frac{1}{2}$ 都是不能再行约分的分数，是最简分数.

现在来比较两分数的大小.

我们知道，三份中的两份多于三份中的一份，所以

$$\frac{2}{3}\text{ 大于 }\frac{1}{3}.$$

这说明，同分母的两分数，分子大的大于分子小的.

如何比较异分母的两分数的大小呢？如

$$\frac{3}{5}\text{ 与 }\frac{4}{7}$$

哪一个大呢？

把 $\frac{3}{5}$ 的分母扩大到七倍，$\frac{4}{7}$ 的分母扩大到五倍，得公分母 $5\times7=35$，根据分数的基本性质，

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35},$$

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times5}{7\times5}=\frac{20}{35}.$$

$\frac{21}{35}$与$\frac{20}{35}$是同分母的两分数，$\frac{21}{35}$大于$\frac{20}{35}$，所以$\frac{3}{5}$大于$\frac{4}{7}$.

把异分母的分数化为同分母的分数的运算称为通分．经过通分，比较分数大小的问题就解决了．

最后讨论分数值的计算问题．

已经知道，$\frac{\text{分子}}{\text{分母}}=\text{分子}\div\text{分母}$，于是

$$\frac{3}{2}=1.5,$$

$$\frac{25}{100}=0.25,$$

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots,$$

所以一个分数或者表示为一个有限小数$\left(\text{如}\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{25}{100}=0.25\right)$，或者表示为循环小数$\left(\text{如}\ \frac{1}{3}=0.333\cdots\right)$.

整数与分数合称为有理数．所以，有理数是由整数、有限小数与循环小数所组成．

三、实　　数

随着社会实践的不断发展，人们对数的认识也不断深化，这里我们从平方与开平方的问题说起．

我们知道，一个正方形的面积等于它的边长的自乘，如果一个正方形的边长是3米（图1-4），那末这个正方形的面积应该是

$$3\times3=9\ (\text{平方米}).$$

两个3的连乘称为3的平方，记为3^2，3的平方等于9，即$3^2=9$.

现在来讨论相反的问题，即开平方的问题．

已知一个正方形的面积等于 9，求这个正方形的边长. 改用数字来叙述这个问题，也就是需要求一个正数，使这个数的平方为 9.

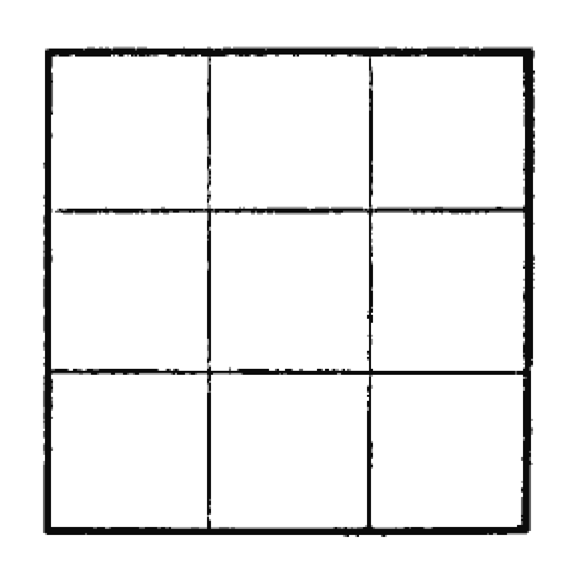


图 1-4

由于 $3^2=9$，所以 3 是所求的数. 这个所求的正数 3 称为正数 9 的算术平方根，记为 $\sqrt{9}$，即 $\sqrt{9}=3$.

求算术平方根的运算通常称为开平方. 3 的平方为 9，9 的算术平方根为 3. 平方与开平方互为逆运算.

由于 $3^2=9$，$30^2=900$，$0.3^2=0.09$，所以

$$\sqrt{9}=3,\quad \sqrt{900}=30,\quad \sqrt{0.09}=0.3.$$

改写这几个结果，

$$\sqrt{900}=30 \text{ 记为 } \sqrt{9\times100}=3\times10,$$
$$\sqrt{0.09}=0.3 \text{ 记为 } \sqrt{9\times0.01}=3\times0.1.$$

从中发现开平方运算的一条性质：

一个数乘上 100 后的算术平方根等于这个数的算术平方根乘以 10;

一个数乘上 0.01 后的算术平方根等于这个数的算术平方根乘以 0.1.

上面我们所列举的 9，900，0.09 都是已知数的平方，所以它们的开方问题随手可解. 一般情形下就不那末容易了. 例如什么数的平方是 2，哪个数的平方为 3，即

$$\sqrt{2}=? \qquad \sqrt{3}=?$$

就不是一个简单的问题. 因为这个问题常常遇到，已经有人把一些数的算术平方根列成表——«平方根表». 有表可查，这个问题也就大致地解决了.

在《平方根表》上，可以查到

$$\sqrt{2}=1.414, \qquad \sqrt{3}=1.732,$$

再用上述开平方运算的性质，可以列出诸如

$$\sqrt{200}=14.14, \qquad \sqrt{30000}=173.2,$$
$$\sqrt{0.02}=0.1414, \qquad \sqrt{300}=17.32,$$
$$\sqrt{0.0002}=0.01414, \qquad \sqrt{0.03}=0.1732$$

等一类数的算术平方根.

$\sqrt{2}$在《平方根表》上的数值是1.414. 其实，1.414只是$\sqrt{2}$的近似值而不是$\sqrt{2}$的真值. $\sqrt{2}$的真值是一个不循环的无限小数. 同样1.732也不是$\sqrt{3}$的真值，$\sqrt{3}$的真值也是一个不循环的无限小数.

社会实践中，我们还会遇到许多的不循环的无限小数. 例如，不论圆的大小如何，用圆的直径除圆的周长总是一个不变的数，这个数称为圆周率，习惯上用π表示. 在公元三世纪，我国人民已经推算出π的一个近似值3.1416，事实上π也是一个不循环的无限小数.

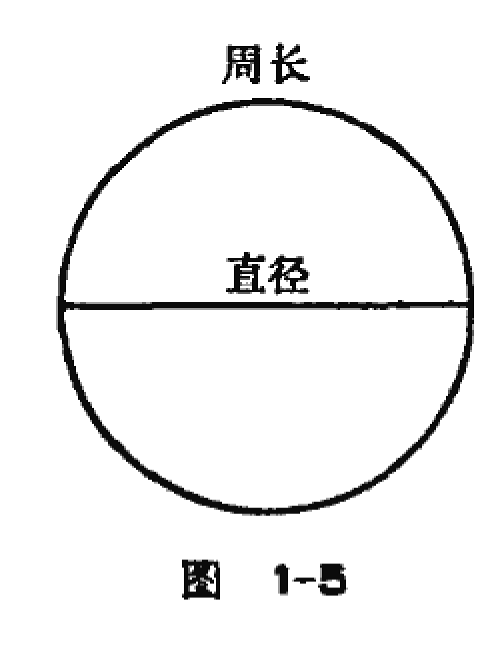
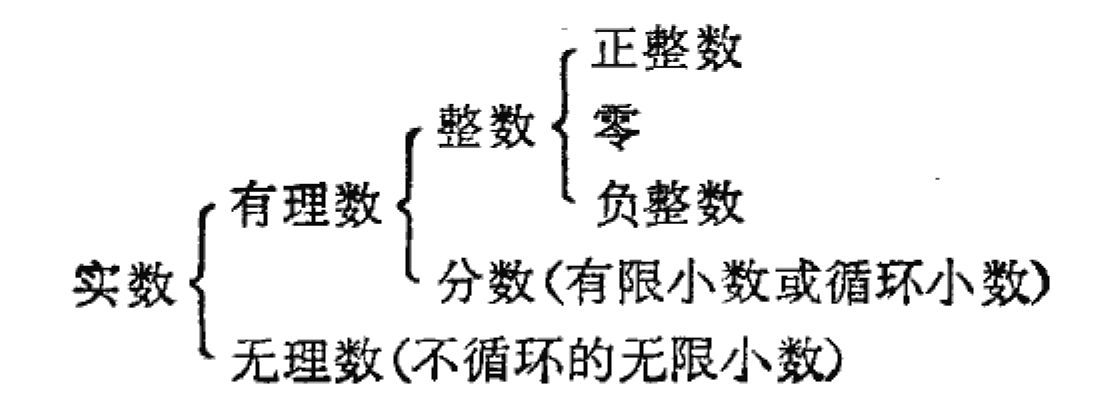


图 1-5

不循环的无限小数又是一种不同于整数和分数的数，称为无理数. 有理数与无理数合称为实数.

这样，由于社会实践的需要，人们对数的认识得到不断的扩充，从整数到有理数又达到了实数.



习　题

1. 计算:

(1) $997+565$, $76.93-5.48$, $1-0.01$, $0.01-0.005$;

(2) 125×6, 0.1×10, $1235\div0.5$, $0.36\div1.44$.

2. 用正数或负数表示:

(1) 珠穆朗玛峰高出海平面 8882 米，吐鲁番盆地最低处低于海平面 154 米;

(2) 最高温度零上 12°C，最低温度零下 2°C;

(3) 每分钟正转 2000 转，每分钟逆转 1500 转;

(4) 进刀 5 厘米，退刀 3 厘米;

(5) 五小时前，二小时后;

(6) 储存 500 斤，消费 200 斤.

3. 指出下列各数的绝对值与符号:

-2; 3; 6; -18; 0; -0.5; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{5}$.

4. 比较大小:

(1) 3 与 4, -3 与 -4, 3 与 -4, -3 与 4;

(2) $\frac{2}{3}$ 与 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ 与 $-\frac{3}{4}$;

(3) 1.4 与 $\frac{3}{2}$, 0.5 与 $-\frac{6}{11}$, 0.3 与 $\frac{1}{3}$, -0.3 与 $-\frac{1}{3}$.

5. 用分数表示:

(1) 地球上陆地面积是地球总面积的十分之三;

(2) 一物体的重量是一公斤的五分之四;

(3) 五分之一尺是二寸;

(4) 一小时的三分之二是 40 分.

6. 化简:

$\frac{9}{12}$; $\frac{24}{42}$; $\frac{56}{142}$; $\frac{16}{6}$; $\frac{350}{1050}$.

7. 将下列各数写成百分数:

$\frac{4}{5}$; $\frac{7}{25}$; 0.9; 0.125; 1.25; 12.5.

8. 通分:

(1) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$;　　(2) $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{105}$;

(3) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$;　　(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

9. 填充括号:

$(\quad)^2=16$;　$(\quad)^2=\frac{1}{4}$;　$(\quad)^2=0.36$;

$(\quad)^2=0.04$;　$(\quad)^2=0.0016$;　$(\quad)^2=\frac{1}{36}$.

10. 已知 $\sqrt{5}=2.236$, 求:

$\sqrt{500}$; $\sqrt{50000}$; $\sqrt{0.05}$; $\sqrt{0.0005}$.

11. 利用«平方根表»计算:

$\sqrt{81.7}$;　$\sqrt{42.36}$;　$\sqrt{9.73}$;　$\sqrt{36.4}$;

$\sqrt{0.817}$;　$\sqrt{4236}$;　$\sqrt{97300}$;　$\sqrt{0.364}$.

12. 已知:

100 厘米(cm)=1 米(m),

10 毫米(mm)=1 厘米,

1000 微米(μ)=1 毫米,

计算:

4 厘米=(　　)毫米;　　235 厘米=(　　)米;

25 毫米=(　　)厘米;　　0.078 毫米=(　　)微米.

13 已知:

1000 公斤(kg)=1 吨,

1000 克(g)=1 公斤,

1000 毫克(mg)=1 克,

计算:

925 公斤=(　　)吨;　　1375 毫克=(　　)克;

23.75 克=(　　)毫克;　　0.0005 吨=(　　)公斤.

14 已知: 1 米=3 尺, 计算:

3.5 米=(　　)尺;　　1 米 70 厘米=(　　)寸;

24.6 尺=(　　)米;　　2.4 寸=(　　)厘米.

15. 已知: 1000米=1公里, 1公里=2里, 计算:

1里=(　　)米;　　　　0.25里=(　　)尺;

0.5里=(　　)丈;　　　　5公里=(　　)尺.

16. 已知: 1小时=60分, 1分=60秒, 计算:

1小时=(　　)秒;　　　　5657秒=(　　)小时(　　)分(　　)秒.

第二节　数字运算的基本规则

一、用字母代替数

在第一节中,我们已经回顾了数的发展过程. 在这里,还要复习一下数的运算方法,从中找出规律性的东西,概括出数字运算的一般规律.

为了这个目的, 一种抽象能力的训练是必不可少的. 事实上,我们已经学会用2表示两个单位,不论它表示的是两亩地还是两头牛. 也学会用正负来区分矛盾现象的两个侧面,不管它们所区分的是增与减还是上与下. 现在还要进一步学会用字母 a、b、c、x、y、z 等代表数字而不涉及这个数字是 -0.5 还是 $+\sqrt{2}$,以便表示数字运算的一般规律.

用字母代替数字以后, 一些数字运算规则就显得简单明了. 例如,关于分数 $\frac{2}{3}$ 与 $\frac{4}{5}$ 的通分问题,经运算

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}\quad 与 \quad \frac{4}{5}=\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15},$$

成为同分母的两分数. 对于任何两个分数, 都可以照样进行通分运算, 但如何把通分的一般方法简明地表示出来呢? 如果我们习惯于用字母代替数,用 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 表示任意两个分数,那末关于分数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的通分问题,就由

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}, \qquad \frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}$$

这样一个清楚的公式，表达了通分的运算规则.

列宁说过："**那一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。**"①现在，在数的运算的基础上，抽象出数字运算的一般规律.

二、乘法与除法

现在所讨论的数有绝对值的大小还有符号的正负．在数字运算中，不仅考虑运算结果的绝对值，还涉及到符号．所以，在数字运算中，符号变化所遵循的规则是普遍存在的问题．我们首先讨论这个问题.

1．反号数

上面已经说过，矛盾着的双方，其数量侧面都可以用正负数来表示．例如，就储存与消费这对矛盾来说，储存五吨粮食与消费五吨粮食通常分别用 $+5$ 吨与 -5 吨来表示.

$+5$ 与 -5 是绝对值相等而符号相反的数，-5 是 $+5$ 的反号数，$+5$ 是 -5 的反号数．一般地说

$$+a \quad 与 \quad -a$$

互为反号数.

2．符号规则

反号数 $+a$ 与 $-a$ 反映着矛盾双方的数量侧面，它们是互相对立的，不过这种对立也不是一成不变的，而是"**依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。**"仍就储存与消费这对矛盾的数量侧面来说，减少消费相当于增加储存，增加消费相当于减少储存，储存与消费这对矛盾着的双方就转化了.

① 列宁：《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》，人民出版社 1972 年版，第 101 页.

现在，设法用数字描述“减少消费五吨相当于增加储存五吨”这个简单事实。

通常，储存五吨与消费五吨分别用 $+5$ 与 -5 来表示：

储存五吨……$+5$，

消费五吨……-5。

对于增减，习惯上也用“+”与“−”去区分，于是

增加储存五吨……$+(+5)$，

减少消费五吨……$-(-5)$。

“减少消费五吨相当于增加储存五吨”就可以表示为

$$-(-5)=+(+5).$$

同样的道理，“增加消费五吨相当于减少储存五吨”也可以表示为

$$+(-5)=-(+5).$$

增加储存五吨的结果是增加了五吨，$+(+5)=+5$，减少储存五吨的结果是减少了五吨，$-(+5)=-5$，于是这个事实可以完整地表示为

$$-(-5)=+(+5)=+5,$$
$$+(-5)=-(+5)=-5.$$

矛盾转化是普遍的现象，可以用字母表示这个现象的数量侧面：

$$-(-a)=+(+a)=+a,$$
$$+(-a)=-(+a)=-a.$$

这是符号转化的基本规则，简称为符号规则，可以概括为：同号为正，异号为负。

3．乘法与除法

从实际抽象出来的符号规则和数字运算有些什么联系呢？我们知道，

$$(-2)\times(+3)=-(2\times3)=-6,$$
$$(+2)\times(-3)=-(2\times3)=-6,$$
$$(-2)\times(-3)=+(2\times3)=+6.$$

观察这组等式中的符号，得到在乘法运算中符号变化所遵循的规则：

同号相乘为正，异号相乘为负。

一般地，可以表示为

$$(-a)\times b=-(a\times b),$$
$$a\times(-b)=-(a\times b),$$
$$(-a)\times(-b)=(a\times b).$$

同样可以知道，在除法运算中符号变化所遵循的规则：

同号相除为正，异号相除为负。

用字母表示为

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},$$
$$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$
$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

从中看出，在乘法与除法运算中，符号变化所遵循的规则与符号规则是一致的，即同号为正，异号为负。

例如，$-(-0.2)=0.2,$ （同号为正）

$+(-2)=-2,$ （异号为负）

$0.5\times(-2)=-0.5\times2=-1,$ （乘法，异号为负）

$(-1)\div(-4)=1\div4=0.25,$ （除法，同号为正）

$\frac{-(-a)}{b}=\frac{a}{b},$ （分子，同号为正）

$$\frac{a}{-(-b)}=\frac{a}{b}, \qquad \text{(分母，同号为正)}$$

$$-\left(\frac{a}{-b}\right)=-\left(-\frac{a}{b}\right) \qquad \text{(除法，异号为负)}$$

$$=\frac{a}{b}. \qquad \text{(同号为正)}$$

为了方便，我们约定，在字母相乘时，乘号“×”可以省略或简记为“·”，如 $a\times b=ab$ 或 $a\times b=a\cdot b$，再如 $3\times a=3a$. 单纯的数字相乘省略乘号“×”时应慎重，如 $2\times3=23$ 将出现错误，$2\times3=2\cdot3$ 会引起混淆，但 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$，$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$ 还是可以的.

三、加法与减法

1. 正整数的加法与减法

两数相加是求二者之和，两数相减是求被减数与减数之差，两正数间不难作加减运算. 例如

$$5+3=8,$$
$$3+5=8,$$
$$5-3=2,$$
$$3-5=-2.$$

与第三个等式作比较，最后一个等式可以改写为

$$3-5=-(5-3).$$

可见大数减小数其差为正；小数减大数，由于交换了二者的地位改变了符号，其差就是负的了.

这样，两正数的加法问题就解决了，从中得出规律性的东西：

交换被加数与加数，其和不变.

用字母表示为

$$a+b=b+a.$$

2．加与减的转化

符号规则和加减运算也有联系．

我们知道，

零加上一个数等于这个数本身，

零减去一个数等于这个数的反号数．

用字母表示为

$$0+a=+a,$$

$$0-a=-a.$$

在加减运算中零不影响数值结果，这两个等式可以读为加 a 等于正 a，减 a 等于负 a．于是在代数中，

加与正，

减与负，

分别统一起来了，这就是统一地用记号“+”表示加与正，用记号“-”表示减与负的道理．

现在，符号规则将有一个新的理解．等式

$$+(-a)=-(+a),$$

$$-(-a)=+(+a)$$

中的“+”、“-”，在括号内的表示性质正负，在括号外的表示运算加减．这组等式应该理解为

加负 a 等于减正 a，

减负 a 等于加正 a．

这样，加减这对运算在代数中可以转化，用字母表示为

$$b+(-a)=b-a,$$

$$b-(-a)=b+a,$$

称为加减转化规则．

有了这个规则，整数中的加法与减法就可以进行了。

3. 整数的加法与减法

[例 1] 异号两数相加：

$$5+(-3)=5-3 \qquad (a+(-b)=a-b)$$
$$=2,$$
$$3+(-5)=3-5=-2,$$
$$(-3)+5=5+(-3) \qquad (a+b=b+a)$$
$$=5-3=2,$$
$$(-5)+3=3+(-5)$$
$$=3-5=-2.$$

[例 2] 同号两数相减：

$$(-3)-(-5)=(-3)+5 \qquad (a-(-b)=a+b)$$
$$=5-3=2,$$
$$(-5)-(-3)=(-5)+3$$
$$=3-5=-2.$$

这两个例题说明，由于加与减的转化，异号两数的加法与同号两数的减法都可以转化为两正数的减法。

[例 3] 同号两数相加：

$$(-3)+(-5)=-(3+5)=-8,$$
$$(-5)+(-3)=-(5+3)=-8.$$

从中看出，两数取负号后相加等于两数相加后再取负号。

[例 4] 异号两数相减：

$$5-(-3)=5+3 \qquad (a-(-b)=a+b)$$
$$=8,$$
$$(-5)-3=(-5)+(-3) \qquad (a-(+b)=a+(-b))$$
$$=-(5+3)=-8.$$

异号两数相减，可转化为同号两数相加。

总之，正负数的加减运算，经转化为两正数的加减运算后，而得到解决。

在这些运算中，我们多次使用等式

$$a+b=b+a.$$

这种交换，适合于加法而不适合于减法．如

$$3+5=5+3, \quad 3-5\neq 5-3^{①}.$$

对于减法，只在转化为加法后，方能作这种交换．如

$$5-3=5+(-3)=(-3)+5,$$
$$-5-3=(-5)+(-3)=(-3)+(-5).$$

四、分数的运算

一个分数表示为 $\frac{a}{b}$，这里分子 a 分母 b 全是整数，分母不为零(记为 $b\neq 0$)．

对于分数，我们已经讨论过它的基本性质，现在进一步讨论分数的运算规则．

分数的基本性质说明：当分子分母同乘以不为零的数时，分数的值不变．这个性质可以用字母表示为

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb} \quad (m\neq 0).$$

条件 $m\neq 0$ 是不可少的，因为除数为零是不允许的．

现在讨论加减运算．

我们知道，同分母的两分数相加减，分子相加减，分母不变；异分母的两分数经通分后，再行加减．用字母表示为

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c},$$

---

① "≠"表示不等于。

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

举几个例子.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times 3+1\times 2}{2\times 3} \qquad \text{(通分)}$$

$$=\frac{5}{6},$$

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{2\times 4-3\times 3}{3\times 4} \qquad \text{(通分)}$$

$$=\frac{8-9}{12}=-\frac{1}{12},$$

$$-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{-3\times 3-5\times 2}{12} \qquad \text{(通分, 取最小公分母 12)}$$

$$=\frac{-9-10}{12}=-\frac{19}{12},$$

$$2+\frac{2}{3}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2\times 3+2}{3}=\frac{8}{3}.$$

最后一个例子中,整数作为分母是 1 的分数参加运算.

再讨论乘除运算.

我们也知道,两分数相乘,分子乘分子,分母乘分母;两分数相除,被除数和颠倒的除数相乘. 用字母表示为

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

例如,

$$\frac{4}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{3}.$$

另外，

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b},$$

$$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc},$$

$$c\div\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{b}{a}=\frac{cb}{a}.$$

这里，整数 c 也作为分母是 1 的分数参加运算。

作为特例，若 $b\neq0$，

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

这个等式告诉我们，在 $b\neq0$ 的条件下，除以 b 等于乘以 $\frac{1}{b}$，就是说，在除数不为零的条件下，乘除互为逆运算.

把 a 表示为 $\frac{a}{1}$，$\frac{1}{a}$ 称为 $\frac{a}{1}$ 的倒数，如 3 与 $\frac{1}{3}$ 互为倒数，$\frac{3}{2}$ 与 $\frac{2}{3}$ 互为倒数，$-\frac{4}{3}$ 与 $-\frac{3}{4}$ 互为倒数，一般地说，

$$\frac{a}{b}\ \text{与}\ \frac{b}{a}$$

互为倒数. 所以，除以一个数等于乘以这个数的倒数，乘以一个数等于除以这个数的倒数.

这里，我们一直假设 $\frac{a}{b}$ 中的 a，b 都取整数. 事实上对一切实数 a、b $(b\neq0)$，上述性质及运算方法都依旧成立.

例如，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707.$$

再如，

$$\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707,$$

$$\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2}{3}=1.$$

五、数字运算的基本规则

上面我们已经知道，加与减可以转化；在除数不为零的条件下，乘与除也可以转化．我们还知道，加法满足一条基本性质

$$a+b=b+a.$$

不难验证，乘法也满足一条类似的基本性质，即交换被乘数与乘数其积不变，用字母表示为

$$ab=ba.$$

现在进一步讨论数字运算的基本规则。

1．两个以上数字的运算

对于 $2+3+4$，可以依次结合进行运算

$$2+3+4=(2+3)+4=5+4=9.$$

也可以采取另外的结合方式，

$$2+3+4=2+(3+4)=2+7=9.$$

这个例题告诉我们，在加法运算中，任意结合加数与被加数其和不变．用字母表示为

$$a+b+c=(a+b)+c$$
$$=a+(b+c).$$

根据这条性质，在计算 $1-2+3-4$ 时，可以把正负数分别结合起来进行运算，

$$1-2+3-4=1+3-2-4=1+3-(2+4)$$
$$=4-6=-2.$$

再如，

$$2-\frac{2}{5}+5-\frac{3}{5}=2+5-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$$

$$=2+5-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)=7-1=6,$$

$$\frac{1}{3}-0.25+\frac{2}{3}-0.75=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-0.25-0.75$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-(0.25+0.75)$$

$$=1-1=0.$$

在后两个例题中，对整数与分数或分数与小数各自先行结合，再行运算，这样运算可以简化.

乘法也有类似性质，任意结合乘数与被乘数，乘积不变，用字母表示为

$$abc=(ab)c$$

$$=a(bc).$$

例如

$$\frac{1}{2}\times a\times 2=\frac{1}{2}\times 2\times a=a,$$

$$a\times 3\times b=3\times a\times b=3ab.$$

2. 混合运算

对于

$$3\times 4+3\times 2,$$

可以按“先乘后加”的方法得

$$3\times 4+3\times 2=12+6=18,$$

也可以先抽出公共的倍数 3，得

$$3\times 4+3\times 2=3\times(4+2)=3\times 6=18,$$

所得结果相同，就是说

$$3\times(4+2)=3\times 4+3\times 2.$$

这个结果有一般意义，用字母表示为

$$a(b+c)=ab+ac.$$

应用这条性质可以简化计算

$$104\times 21=(100+4)\times 21$$
$$=2100+84=2184,$$
$$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(3+2)\sqrt{2}=5\sqrt{2}=7.07.$$

3. 数字运算的基本规律

总结数字运算，可以概括出数字运算的基本规律：

交换律　　$a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a.$

结合律　　$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$

$$a\cdot b\cdot c=(ab)c=a(bc).$$

乘法对加法的分配律　　$a(b+c)=ab+ac.$

还有几条常用的结果，例如

$$b-c=-(c-b),$$
$$a(b-c)=ab-ac.$$

前一条是常见的，后一条需要推一下：

$$a(b-c)=a(b+(-c))\qquad\text{(减转化为加)}$$
$$=ab+a(-c)\qquad\text{(分配律)}$$
$$=ab-ac.\qquad\text{(异号数相乘)}$$

这个结果也很有用，例如

$$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(5-2)\sqrt{3}=3\sqrt{3}=5.196,$$
$$\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{3}-2\sqrt{2}=2.368.$$

在分配律

$$a(b-c)=ab-ac$$

中，分别取 $a=+1$ 与 $a=-1$，又得到两个有用的结果

$$+(b-c)=b-c;$$

$$-(b-c)=-b+c.$$

这两个结果提出去括号的方法：

括号前的符号为正，去括号后，原括号内的数符号不变；

括号前的符号为负，去括号后，原括号内的数改变符号．

这种处理方法也完全适用于加括号．

举几个例子：

$$5-(4+\sqrt{5})=5-4-\sqrt{5}=1-\sqrt{5},$$
$$-5+(4-\sqrt{5})=-5+4-\sqrt{5}=-1-\sqrt{5}.$$

再举几个字母运算的例子：

$$-a-b+c=-(a+b)+c=c-(a+b),$$
$$-a-b+c=-(a+b-c),$$
$$\begin{aligned}-\{a-[b-(c-d)]\}&=-\{a-[b-c+d]\}\\&=-\{a-b+c-d\}\\&=-a+b-c+d.\end{aligned}$$

在这些例题中，整个括号常作为一个数参加运算．这种做法今后更为常见．

小　　结

1．关于符号规则

$$-(-a)=+(+a)=+a,$$
$$-(+a)=+(-a)=-a.$$

同号为正，异号为负．

乘除运算中的符号变化也遵守同号为正、异号为负的规则．

2．关于运算的相互转化

(1) 加与减的相互转化．

加上一个数等于减去这个数的反号数：

$$a+b=a-(-b),$$

减去一个数等于加上这个数的反号数：

$$a-b=a+(-b).$$

(2) 乘与除的相互转化.

除以一个不为零的数等于乘上这个数的倒数：

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

乘上一个不为零的数等于除以这个数的倒数：

$$ab=a\Big/\frac{1}{b}.$$

3．关于分数

(1) 基本性质 $\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}\quad(m\neq 0).$

(2) 加法规则 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$

(3) 乘法规则 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$

4．关于数字运算的基本规律

交换律 $a+b=b+a;\quad a\cdot b=b\cdot a.$

结合律 $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c;$

$a\cdot b\cdot c=a(bc)=(ab)c.$

分配律 $a(b+c)=ab+ac.$

习　题

1．辨别一下哪些相等，哪些互为反号数：

$+(+6)$ 与 -6； $-(+6)$ 与 $+(-6)$； $-(-6)$ 与 $+(+6)$；

$\frac{-2}{3}$ 与 $\frac{2}{-3}$； $\frac{2}{-3}$ 与 $-\frac{2}{3}$； $\frac{2}{3}$ 与 $\frac{-2}{-3}$.

2．化简：

(1) $(+1)a$，$(-1)a$，$a(-1)$；

(2) $-\frac{-a}{b}$, $\frac{-(-a)}{-b}$, $-\frac{a}{-b}$, $-\frac{-a}{-b}$.

3. 填充括号:

$0.5\times(-2)=(\quad)$; $(-0.25)\times 8=(\quad)$;

$(-4)\times(-0.8)=(\quad)$; $(-0.8)\div(-2)=(\quad)$;

$0.25\div(-0.5)=(\quad)$; $(-108)\div(0.6)=(\quad)$.

4. 心算:

$(-8)+(-5)$, $(-5)+(+8)$, $(-8)-(-5)$, $(-5)-(-8)$,

$(-8)+(+5)$, $(+5)+(-8)$, $(-8)-(+5)$, $(-5)-(+8)$.

5. 计算:

(1) $(-7.8)+(-0.6)$, $(-7.8)-(-0.6)$, $23+(-46)$,

$2.54+(-0.67)$, $5.25+(-8.19)$, $(-3)-(-0.28)$;

(2) $1.24-5.86$, $-2.37+56.28$, $-3-0.45$,

$-5+23$, $-65.4+29.7$, $-0.85-0.7$.

6. 求公差:

$30^{+0.1}_{-0.1}$; $100^{+0.12}_{-0.15}$; $75^{+0.24}_{-0.18}$; $25^{+0.36}_{-0.18}$

(右上角的数是上偏差，右下角的数是下偏差，上偏差与下偏差之差称为公差).

7. 下面是一组水位的升降记录，求第五天与第一天的水位差:

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天
升 0.08 米	降 0.04 米	升 0.08 米	升 0.05 米	降 0.02 米

8. 计算:

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{7}{12}$, $\left(-\frac{7}{8}\right)-\frac{3}{20}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4}{9}\right)$;

(2) $(-2)-\frac{2}{3}$, $3+\left(-\frac{7}{2}\right)$, $(-1)+\frac{8}{9}$, $(-4)-\left(-\frac{4}{5}\right)$.

9. 化简:

$\frac{1}{2}\Big/3$; $2\Big/\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{3}$; $\frac{1}{a}\Big/b$; $a\Big/\frac{1}{b}$; $\frac{1}{a}\Big/\frac{1}{b}$.

10. 填充括号并计算结果:

$\left(-\frac{1}{12}\right)\div\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}\times(\quad)$; $\frac{27}{12}\div(-9)=\frac{27}{12}\times(\quad)$;

$\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\times(\quad)$; $4\div\left(-\frac{8}{7}\right)=4\times(\quad)$.

11. 计算:

(1) $42\times\frac{9}{14}$, $\frac{3}{4}\div(-2)$, $\frac{7}{15}\times\left(-\frac{3}{8}\right)$, $\left(-\frac{20}{63}\right)\div\frac{5}{21}$;

(2) $\frac{6}{5}\times\frac{5}{14}\times\frac{7}{9}$, $\frac{14}{3}\times\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}$, $\frac{20}{9}\div\left(2\times\frac{9}{7}\right)$, $\frac{20}{9}\div2\times\frac{9}{7}$.

12. 计算数值并总结符号变化规律:

$(-2)\cdot(+2)\cdot(+2)\cdot(+2)$; $(-2)\cdot(-2)\cdot(+2)\cdot(+2)$;

$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(+2)$; $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$.

13. 计算:

$(-23)+178+(-67)+(-28)$, $(-18)+37-42+(-80)+123$,

$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}-0.5-\frac{3}{4}$, $(-14.85)+24.52-65.16+56.48$.

14. 计算:

(1) $\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})$, $-\sqrt{2}-(5-\sqrt{2})$;

(2) $-(4-\sqrt{5})+4$, $2\sqrt{3}-\sqrt{3}$;

(3) $1.75\times\frac{1}{2}-1.95\times\frac{1}{2}$, $6-3(2-3\sqrt{5})$;

(4) $\left(\frac{4}{9}-\frac{16}{27}+\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{27}{4}\right)$, $6\sqrt{2}+3(1-2\sqrt{2})$.

15. 计算:

$-48-8\times(-18+29-37)$; $\left[\frac{7}{9}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{15}\right)\div3\right]\times\frac{2}{3}$;

$-26-(-64-32)\div16$;

$4.74\div\{[3\times(1.2+1.6)-0.3\times1.5]-0.05\}$;

$\frac{8}{9}\times\left\{\frac{13}{4}+\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right)\div\frac{3}{2}\right\}$;

$\{[25-(2\times3-4\div2)]\times0.5+1.5\}\times2$;

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{6}{5}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}$;

$7.56-[-14.06-(3.05-16.55)]$.

16. 去括号:

(1) $(-a)(2x)$, $(-2a)(-x)$, $ax(-2)$;

(2) $(-2)(a-1)$, $-a(b-c)$, $(-a)(b+c)$;

(3) $a-(-b)+c$, $a+(-b)-(-c)$,

$a-[b+(c-d)]$, $a+[b-(c-d)]$.

17. 填充括号:

$a-b+c-d=(a+c)-(\quad)$; $1+a-b=1+(\quad)=1-(\quad)$;

$a-b+c-d=(a+c)+(\quad)$; $1-a+b=1-(\quad)=1+(\quad)$.

18. 去括号并化简:

$(a+b)-(a-c)$; $(a+b)+(c-b)$;

$(a-b)-(a-c)$; $(a-b)+(c+b)$;

$-(a+b)-(c-b)$; $-(a-b)+(a-c)$.

第三节 用字母揭示数量关系

“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，……为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容”，“这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。”①这是恩格斯对数学的内容与形式所做的高度概括. 在前两节中，我们已经开始习惯于这种处理方法，把数字抽象成字母，用简洁的形式表示出数字运算的基本规律，现在要进一步从客观世界的物理模型中抽象出它的数量关系，把三大革命运动中的实际问题翻译成数学语言，以便利用数字运算的基本规则进行推理与演算，为三大革命运动的实践服务.

一、含有字母的等式

1. 把实际问题“翻译”成含有字母的等式

[例 1] 矩形面积.

① 恩格斯:《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 35 页.

一块矩形的钢板，长 5 米，宽 4 米，这块矩形钢板的面积等于

$$5\times4=20\ (\text{平方米}).$$

用 F 表示矩形面积，a、b 表示矩形的长与宽（图 1-6）。矩形面积等于长与宽的乘积，这个事实可以表示为一个含有字母的等式

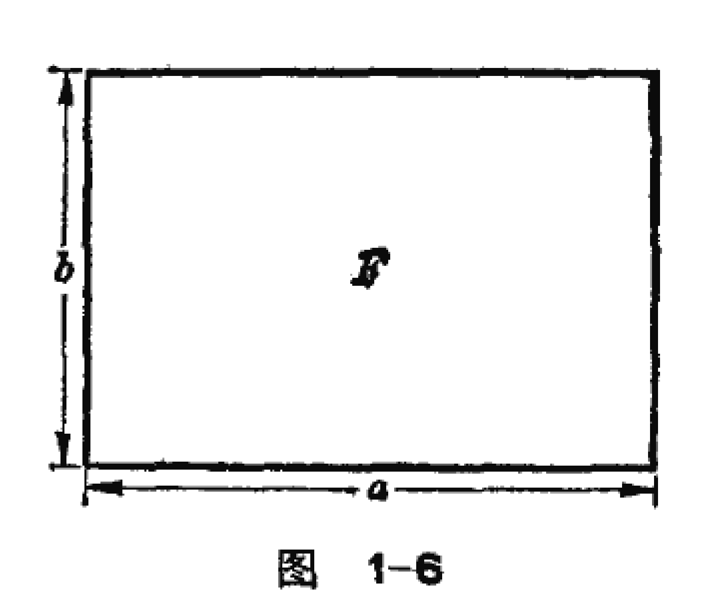


图 1-6

$$F=ab.$$

数字等式 $20=5\times4$ 不足以表示一般的矩形面积与其长宽的数量关系；而从实践中抽象出来的含有字母的等式 $F=ab$ 则反映了这种关系．事实上，只要知道矩形的长与宽的数值，根据这个等式，就能够计算出矩形面积的数值．

[例 2] 平均数．

两位社员，一位身长 1.8 米，一位身长 1.7 米，他们平均身长应该是两个人身长之和再除以 2．经计算，平均身长为

$$\frac{1.8+1.7}{2}=1.75\ (\text{米}).$$

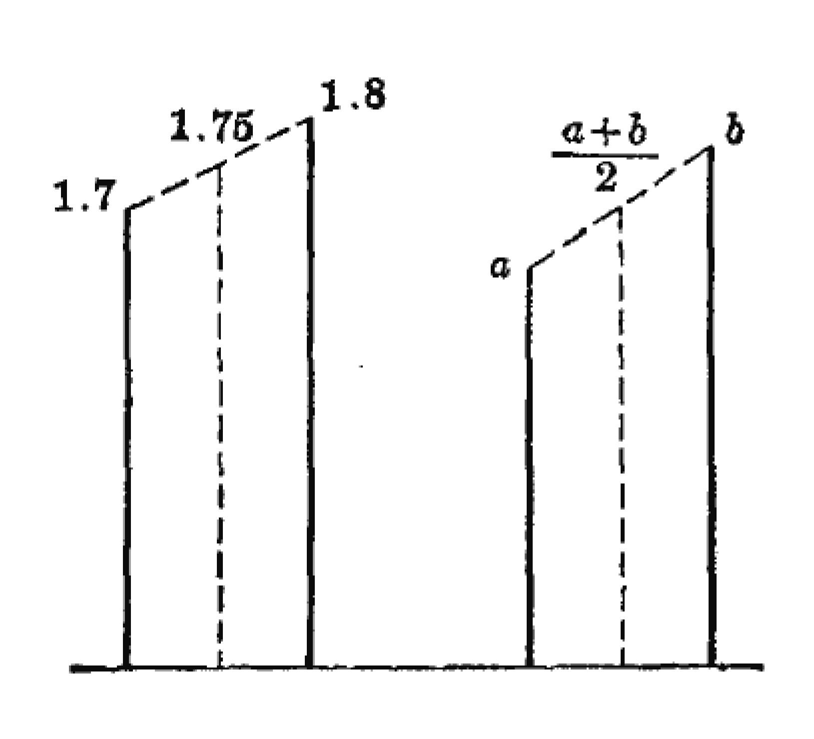


图 1-7

两位社员的体重，一位 70 公斤，一位 60 公斤，他们的平均体重应该是

$$\frac{70+60}{2}=65\ (\text{公斤}).$$

a、b 各表示一个数，考虑一个含有字母的等式

$$M=\frac{a+b}{2}.$$

如 a、b 表示的是身长，M 就是平均身长；如 a、b 表示的是体重，M 就是平均体重．这样，不论 a、b 代表的是什么，它们的平均数都可以用这个含有字母的等式来表示和计算．

显而易见，$M=\frac{a+b}{2}$ 较之 $1.75=\frac{1.8+1.7}{2}$ 或者 $65=\frac{70+60}{2}$ 意义深刻得多，用途也广泛得多，可见，把实际问题"翻译"为含有字母的等式确有好处．

把实际问题"翻译"成含有字母的等式，是学习数学的一项基本训练，我们必须反复进行这种训练．

[例 3]　把下列各事实译成含有字母的等式：

(1) 毛重 c 等于皮重 a 与净重 b 之和，

$$c=a+b;$$

(2) 小麦的产量 b 是玉米产量 c 的两倍，

$$b=2c;$$

(3) 水稻产量 a 较小麦产量 b 多两倍，这就是说，

水稻产量＝小麦产量＋水稻较小麦的增多部分，

$$a=b+2b=3b;$$

(4) 食盐溶液中，食盐的重量 a 是水的重量 b 的百分之十八，

$$a=b\times18\%;$$

(5) 某厂今年的钢产量 a 较去年的钢产量 b 增加了 18%，

$$a=b+b\times18\%=b(1+18\%).$$

[例 4]　继续"翻译"下列事实：

b 是 a 的 $\frac{2}{3}$，　　　　　　$b=\frac{2}{3}a;$

d 等于 a 的倒数与 b 的倒数之和，　$d=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$；

c 的平方等于 a 与 b 的平方和，　$c^2=a^2+b^2$；

d 是 a，b 之和的平方，　$d=(a+b)^2$；

a 比 b 增加了百分之五，　$a=b(1+5\%)$。

2. 从含有字母的等式进行实际计算

在"翻译"的过程中，我们已经看到

$$F=ab,\qquad M=\frac{1}{2}(a+b)$$

等一类等式．这些等式的一侧是要求的量，另一侧是用运算符号把数字、字母联结起来的算式（计算公式）．在解决实际问题时，常常需要把公式中的字母换成它所代替的数，经过数的计算，最终求出结果．

［例 5］　求长为 25 米，宽为 16 米的矩形的面积．

解：在求矩形面积的公式 $F=ab$ 的右侧，代进 $a=25$，$b=16$，得到

$$F=25\times16=400\ \text{（平方米）}.$$

［例 6］　某队今年水稻的亩产量是 2000 斤，去年是 1500 斤，求两年的平均亩产量．

解：这是一个求平均数的问题．在公式 $M=\frac{1}{2}(a+b)$ 的右侧，代进 $a=2000$，$b=1500$，得到

$$M=\frac{1}{2}(2000+1500)=1750\ \text{（斤）}.$$

［例 7］　1972 年某生产队棉花平均亩产 190 斤，而在 1955 年时亩产为 1972 年的百分之三十点五，求 1955 年时棉花平均亩产量。

解：设 1955 年某生产队棉花平均亩产量为 a，而 1972 年亩产为 b，按题意，

$$a=b\times 30.5\%.$$

在这个公式中，代进 $b=190$ 斤，经过计算，

$$a=190\times 30.5\%\approx 58,$$

所以 1955 年某生产队棉花平均亩产量约 58 斤。

二、等式变形

一辆汽车驶过长江大桥，在行驶过程中快慢不变，如果已知桥面全长 3825 米，行驶时间为 15 分钟，那末这辆汽车每分钟的行程或速度是多少？这是一个简单的除法运算，行驶速度是

$$\frac{3825}{15}=255\ (\text{米/分}).$$

如果已知行驶速度是 255 米/分，行驶时间是 15 分钟，那末桥面全长是

$$255\times 15=3825\ (\text{米}).$$

如果已知桥面全长是 3825 米，行驶速度是 255 米/分，那末行驶时间是

$$\frac{3825}{255}=15\ (\text{分}).$$

这是一些具体的数值计算．为了揭示在等速运动中路程、时间、速度这三者间的数量关系，用字母 s 表示路程，t 表示时间，v 表示速度．由于单位时间所通过的路程是运动速度，于是这种关系表示为以下三种形式：

$v=\frac{s}{t}$ …………单位时间所走的路程．

$s=vt$ …………t 个单位时间所走的路程．

$t=\dfrac{s}{v}$ …………以速度 v 走完全程所需的时间.

它们都从不同的侧面反映这种关系. 已知路程 s 与时间 t, 由$v=\dfrac{s}{t}$ 可求出速度 v; 已知速度 v 与时间 t, 用 $s=vt$ 可算得走过的全程 s; 已知全程 s 与速度 v, 从 $t=\dfrac{s}{v}$ 可推知所费的时间 t.

形式可有多种,但所揭示的都是同一个模型的数量关系,因此,在这多种形式之间必有内在联系;就是说,用数学的推理与演算,可以从其中的一种形式推出其他的形式,这就是等式变形问题.

如何实现这种变形呢? 人们在长期的社会实践中总结出等式变形规则,概括为两句话:

等式两侧同时加或减一个相同的数仍是等式;

等式两侧同时乘或除以一个不为零的相同的数仍是等式.

用字母表示为:

若 $a=b$, 则 $a+c=b+c$, $a-c=b-c$;

若 $a=b$, $c\neq 0$, 则 $ac=bc$, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.

作为例题,我们研究等速运动.

(1) 从等式 $v=\dfrac{s}{t}$, 推出等式 $s=vt$.

为此, 在 $v=\dfrac{s}{t}$ 两侧同乘以 t, 得到 $vt=\dfrac{s}{t}\cdot t$, 经过约分, 等式右侧只留下 s, 左侧是 vt, 得到要推的等式 $s=vt$.

(2) 从等式 $s=vt$ 推出 $t=\dfrac{s}{v}$.

为此,在 $s=vt$ 两侧同除以 v, 得到 $\dfrac{s}{v}=\dfrac{vt}{v}$, 经约分, 等

式一侧只留下 t，另一侧是 $\frac{s}{v}$，得到 $t=\frac{s}{v}$.

再研究一个例题. 我们知道，

$$毛重=皮重+净重, \qquad c=a+b;$$

作为常识，我们也知道

$$净重=毛重-皮重, \qquad b=c-a.$$

事实上，这后一个等式，也可以应用变形规则而获得. 在等式 $c=a+b$ 的两侧，同时减去 a，得到 $b=c-a$；同样，同时减去 b 则得到 $a=c-b$.

从这两个例子看出，从物理模型中抽象出数量关系，利用数字运算基本规则进行推理，便可得到从另外一个侧面揭示这个模型的数量关系的结果.

对于等式变形需要进行一些训练.

[例 8] 已知 x 分别满足：

(1) $\frac{1}{a}(x+b)=1$； (2) $-(b-x)=a$； (3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=1$,

依次推出求 x 的公式.

解：(1) 先去分母. 在等式两侧同乘以 a，经过约分得到

$$x+b=a,$$

两侧再同减 b，得到求 x 的公式

$$x=a-b.$$

(2) 先去括号. 根据去括号方法，得到

$$-b+x=a,$$

两侧同加 b，得到求 x 的公式

$$x=a+b.$$

(3) 先推出求 $\frac{1}{x}$ 的公式. 等式两侧同减 $\frac{1}{a}$，得到

$$\frac{1}{x}=1-\frac{1}{a} \quad 或 \quad \frac{1}{x}=\frac{a-1}{a}.$$

去分母．两侧同乘以 ax，得

$$a=(a-1)x,$$

两侧再同除以 $a-1$，得到求 x 的公式

$$x=\frac{a}{a-1}.$$

在解(3)的过程中，从 $\frac{1}{x}=\frac{a-1}{a}$ 得到 $x=\frac{a}{a-1}$，这个结果告诉我们，若两个数相等，它们的倒数也相等．用字母表示：在 a，b 不为零时，由 $a=b$ 可推得 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$；由 $a=\frac{1}{b}$ 可推得 $\frac{1}{a}=b$；由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 可推得 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

[例 9] (1) 若 a 满足等式 $\frac{a}{30}=18\%$，求 a；

(2) 若 b 满足等式 $\frac{30}{b}=24\%$，求 b；

(3) 若 c 满足等式 $\frac{6}{25}=c\%$，求 c.

解：(1) 在等式两侧同乘以 30，得到

$$a=\frac{30\times18}{100}=5.4.$$

(2) 利用已知的结果：两数相等，它们的倒数也相等．从原式推得 $\frac{b}{30}=\frac{100}{24}$，两侧同乘以 30，

$$b=\frac{30\times100}{24}=125.$$

(3) 原式可写成 $\frac{6}{25}=\frac{c}{100}$，两侧同乘以 100，得

$$c=\frac{6\times100}{25}=24.$$

上例告诉我们，设 a、b、c 满足等式

$$\frac{a}{b}=c\%,$$

那末求 a、b、c 的算式分别是

$$a=\frac{bc}{100},\quad b=\frac{a\times100}{c},\quad c=\frac{a\times100}{b}.$$

上面我们已经多次使用了等式变形规则，现在把它概括一下.

设我们已有形如 $a+b=c$ 这样的等式，其中 b、c 为已知，需要从此推出求 a 的公式. 就是说，要通过等式变形，把 a 与 b、c 分置在一个等式的两侧.

在等式 $a+b=c$ 的两侧，同减 b，这样，b 做为加数从左侧消失，同时又做为减数在右侧出现，$a=c-b$.

这个过程可以概括为：移加为减.

同样道理，对于形如 $a-b=c$ 的等式，可以通过移减为加而变形为 $a=c+b$.

设我们有形如 $ab=c$ 这样的等式，其中 b、c 为已知，$b\neq0$，需要从此推出求 a 的公式. 就是说，要通过等式变形把 a 与 b、c 分置在一个等式的两侧.

在等式 $ab=c$ 的两侧同除以 b，这样，b 做为乘数在左侧消失，又做为除数在右侧出现，$a=\frac{c}{b}$.

这个过程可以概括为：转乘为除.

同样道理，对于形如 $\frac{a}{b}=c$ 的等式，可以通过转除为乘而变形为 $a=bc$.

所以等式变形规则可以概括为：移加为减，移减为加，转乘为除，转除为乘.

加与减、乘与除各自都是矛盾的双方，在等式变形的过程中这对矛盾的双方就互相转化了.

习　题

1. 解答下列各问题：

   (1) x 的 5 倍、y 倍各是多少？

   (2) a、$-b$ 的 n 分之一各是多少？

   (3) a 的倒数与 a 的 2 倍的平方各是多少？

   (4) a 的反号数与 a 的平方的两倍各是多少？

2. 甲数记为 a，乙数记为 b，按下列要求列出含有 a 与 b 的等式：

   (1) 甲数是乙数的 4 倍；　(2) 甲数比乙数多 4 倍；

   (3) 甲数比乙数的 4 倍多 5；　(4) 甲数比乙数的 4 倍少 5；

   (5) 甲数是乙数的百分之二十五；

   (6) 甲数比乙数少百分之二十五.

3. 有稻田 m 亩，每亩施肥 a 斤，麦田 n 亩，每亩施肥 b 斤，问一共需要施肥多少斤？

4. 回答下列各问题：

   (1) 一台拖拉机 n 天耕完一块地，每天能耕这块地的几分之一？

   (2) 一台拖拉机 n 天耕完 a 亩地，每天能耕几亩地？

   (3) m 台拖拉机 t 天耕完 s 亩地，每台每天能耕几亩地？

5. a 与 b 依次表示下列各量，求 a 与 b 的平均数：

a	135 厘米	零上 8°C	52 公里/小时	$35x$
b	228 厘米	零下 4°C	48 公里/小时	$-27x$

6. 填充括号：

   54 公里/小时＝(　　)米/秒；　20 米/秒＝(　　)公里/小时；

   12 公里/分＝(　　)米/秒.

7. 汽车以 44 公里/小时速度经过 250 米的桥面，问需要多少时间？

8. 轮船以 20 公里/小时的速度行驶，求 5 小时 15 分钟的行程.

9. 月球绕地球以 1 公里/秒的速度运动，求一小时经过的路程.

10. 应用等式变形求 x:

$x+1=-5$; $x-a=b$; $2x=-1$;

$\frac{x}{a}+b=1$; $-(x-2)+3=1$; $a-(x-b)=0$;

$\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=1$; $\frac{a}{x}+b=0 \quad (b\neq 0)$;

$\frac{1+x}{2}=1$; $\frac{3-2x}{2}=-5$; $\frac{b-ax}{c}=d \quad (a\neq 0)$.

11. 百分数的运算:

(1) 43 的 18% 是多少? (2) 52 的 125% 是多少?

(3) 已知一个数的 23% 是 575，求这个数;

(4) 24 是 72 的百分之几? (5) 72 是 75 的百分之几?

12. 某合金的含锰量是 1.6%，这种合金共 20 吨，问共含锰多少?

13. 一种矿石含铁量是 22%，要炼铁 33 吨，需要这种矿石多少吨?

14. 化肥硫酸氨中含氮 $\frac{7}{33}$，150 吨的这种化肥中共含氮多少?

15. 100 斤稻谷能得大米 75 斤，要得到 1000 斤大米，需要多少稻谷?

16. 等式变形:

(1) 已知 $R=R_1+R_2$，写出求 R_2 的式子;

(2) 已知 $v^2=2gH$，写出求 H 的式子;

(3) 已知 $V=V_0(1+\alpha t)$，写出求 t 的式子;

(4) 已知 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，写出求 R_2 的式子.

第四节　比与比例

一、比例式及其变形

1. 比例式

在实际问题中，常常需要讨论相关量之比的问题．例如，

在铜锡合金中，铜与锡的重量比是3比1，这意思是说，在这种合金中，把铜的重量等分为三份，锡的重量就相当于其中的一份. 比与除是同一个意思. 在这种合金中，把铜的重量记为 a，锡的重量记为 b，a 与 b 之比是3比1，于是

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{1},$$

$\frac{3}{1}=3$ 是 a 与 b 的比.

当铜的重量是6斤，锡的重量必是2斤. 铜的重量是9斤，锡的重量必是3斤，……，6与2之比等于9与3之比，

$$\frac{6}{2}=\frac{9}{3}.$$

这里出现了一种等式，它的两侧都是两个数的比. 这是经常要遇到的一种等式，一般地可以表示为

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

这等式称为比例式，简称为比例.

2. 比例式的变形

在比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的两侧，根据转除为乘的原则，把 b，d 分别变到另一侧，得到 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的一个基本变形

$$ad=bc.$$

为了便于推理与使用，比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 还有其他的多种变形:

(1) 更比公式:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

(2) 合比公式、分比公式:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

更比公式是容易看出的,这里只推导合比公式与分比公式.为此,在

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

两侧同加1,得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,经通分得到合比公式

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

同样,在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 两侧同减1,经通分得分比公式

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

$\frac{a}{b}$ 常常记为 $a:b$,比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 又可以写成

$$a:b=c:d,$$

比例式中,在 b、c 位置的称为内项,在 a、d 位置的称为外项,于是 $a:b=c:d$ 的诸种变形有如下的解释:

比例式 $a:b=c:d$ 的内项乘积等于外项乘积,$ad=bc$.

在比例式 $a:b=c:d$ 中,可以交换两内项的位置,$a:c=b:d$,也可以交换两外项的位置,$d:b=c:a$.

二、正比与反比

1. 正比

以等速运动为例讨论正比问题.

假设火车每分钟行车1.5公里,由于速度不变,于是一分钟走完1.5公里,两分钟走完3.0公里,……. 行车时间记

为 a，行车路程记为 b，对于这两个互为依存的量，可以列出下表：

a (分)	1	2	3	4	5	6 …
b (公里)	1.5	3.0	4.5	6	7.5	9 …

分析这张表可以看出，a 扩大几倍，b 跟着扩大同样倍数. 具有这种性质的依存关系，称为正比关系.

可以用比例式把满足正比关系的两个量的联系表示出来. 如果一个量 a 从 a_1 变到 a_2，相关的量 b 相应地从 b_1 变到 b_2；由于扩大的倍数相同，所以

$$a_2 : a_1 = b_2 : b_1,$$

对调外项位置，

$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2,$$

这个式子说明，成正比的两个量 a 与 b，它们的比值 $b:a$ 是一个不变的量（不变的量通常称为常量），记为 k，于是成正比的两个量 a 与 b 恰好满足关系

$$\frac{b}{a}=k \quad 或 \quad b=ka.$$

例如，在 1:100 的建筑图纸上，图纸上的尺寸 b 与实物的尺寸 a 之比是 $\frac{1}{100}$，这就是说，

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{100} \quad 或 \quad b=\frac{a}{100}.$$

所以 a 与 b 的关系是正比关系.

若已知 b 的尺寸是 30 毫米，那末实物 a 的尺寸满足等式

$$30=\frac{a}{100},$$

转除为乘，得到实物 a 的尺寸是

$$a=30\times100=3000 \text{（毫米）}.$$

再如，我们已经知道一个圆的周长 l 与半径 r 满足等式

$$\frac{l}{2r}=\pi \quad 或 \quad l=2\pi r,$$

所以，l 与 r 这两个量成正比，根据变形规则，已知周长可求得半径，已知半径可求得周长.

2．反比

仍以等速运动为例，再讨论反比问题.

假设汽车以等速运动走完 240 公里的路程，那末，如果速度是 30 公里/小时，就需时 8 小时，如果速度是 40 公里/小时，就需时 6 小时．对于速度 a 与时间 b 这两个互为依存的量，可以列出下表：

a 公里/小时	20	30	40	50	60
b 小时	12	8	6	4.8	4

分析这张表就可以看出，a 扩大到原来的几倍，b 就缩小到原来的几分之一．具备这种性质的依存关系称为反比关系.

也可以用比例式表示这种关系．如果 a 从 a_1 变到 a_2，相应地 b 从 b_1 变到 b_2，那末 a_2 与 a_1 之比等于 b_1 与 b_2 之比（即 b_2 与 b_1 之比的倒数），于是

$$a_2:a_1=b_1:b_2,$$

由于外项乘积等于内项乘积，所以

$$a_2b_2=a_1b_1,$$

这就是说，成反比的两个量，它们的乘积是一个不变的量，记为 k，于是成反比的两个量 a 与 b 恰好满足等式

$$ab=k \quad 或 \quad b=\frac{k}{a}.$$

考察齿轮传动问题．设主动轮有 z_1 个齿，每分钟转 n_1 转，从动轮有 z_2 个齿，每分钟转 n_2 转，由于两轮互相啮合，在同一时间内两轮通过啮合处的齿数必相等．在一分钟内主动轮转过的齿数为 n_1z_1，从动轮为 n_2z_2，所以两轮的啮合条件为

$$n_1z_1=n_2z_2.$$

这个等式表明，在齿轮传动这个实际问题中，齿数与转数这两个量成反比．

如果已知主动轮有 30 齿，从动轮有 40 齿，主动轮每分钟转 20 转，那末从动轮每分钟转多少呢？

由反比关系，

$$20\times30=n_2\times40,$$

从中算出，从动轮的转速 $n_2=\dfrac{20\times30}{40}=15$，即每分钟转 15 转．

在等速运动这个模型中，如果速度为一常数 k，那末路程 s 与时间 t 成正比

$$s=kt.$$

如果路程是一常数 k，那末速度 v 与时间 t 成反比

$$vt=k.$$

对于一个实际问题，其中各数量间究竟满足何种关系，该列出怎样的数学等式，必须根据问题的条件，做到对具体问题作具体分析．

8．比例分配

举例来说，混凝土的三种原料比为

水泥:细沙:石子＝1:2:4.

这种形式的比称为连比．现在要配制 2800 公斤的混凝土，求所须的水泥、细沙与石子各重多少公斤．这个问题属于比例

分配问题.

这里总份数是 $1+2+4=7$, 在这 7 份混凝土中，水泥、细沙、石子各占 1 份、2 份、4 份；于是欲得 2800 公斤的混凝土，需要

水泥 $2800\times\frac{1}{7}=400$ (公斤),

细沙 $2800\times\frac{2}{7}=800$ (公斤),

石子 $2800\times\frac{4}{7}=1600$ (公斤).

习　题

1. 化简:

   $0.3:0.6$; $7.5:2.5$; $\frac{5}{4}:\frac{3}{4}$; $10:0.1$; $10a:15a$.

2. 求下列比例式中的 x:

   $5:7=8:x$; $x:9=7.5:3$; $7:18=x:0.9$;

   $2.5:x=3.5:14$; $a:b=x:d$; $a:x=c:d$.

3. 若 $a:b=c:d$, 证明连比公式:

   $a:b=c:d=(a+c):(b+d)$.

4. 说明圆周长 l 与圆半径 r 成正比，并计算以 5 米为半径的圆周长，以 $0.5a$ 米为半径的圆周长.

5. 在比数为 1:500000 的地图上，北京到天津的距离是 27.4 厘米，问北京与天津的实际距离是多少公里?

6. 高跨比为 1:4 的木屋架，如果跨度为 5.6 米，问高是多少?

7. 已知矩形面积是 3600 平方厘米，说明矩形的宽和长成反比，并计算当宽取值 6, 12, 18, 24, 36 厘米时，矩形之长各是多少?

8. 两啮合齿轮，大的有 105 齿，小的有 42 齿，如果大的每分钟转 180 转，小的每分钟转多少?

9. 某生产队共有土地 900 亩，按 2:3:4 的比种植黄豆、棉花、水稻，问黄豆、棉花、水稻各种多少亩?

10. 我国劳动人民最早发明了黑色火药，它是用硫磺、木炭、硝石三种原料制成的. 有一种用这三种原料制成的火药，三种原料的重量比是 2:3:15，现在要配制这种火药 150 公斤，问需要硫磺、木炭、硝石各多少公斤？

第五节　简 易 方 程

我们已经开始学会把实际问题译成数学语言，列出数学等式，然后经过推理与演算，求得问题的解决. 这是用数学方法解决实际问题的一个大概的过程. 现在来分析这个过程.

一、列方程与解方程

例如，1971 年我国某钢铁公司钢产量较 1970 年增长了百分之十八，达到二百万吨，计算一下 1970 年该公司钢产量是多少.

先把这个问题译成数学语言. 按题意，

1970 年的产量＋1971 年的增产量＝1971 年的产量.

1970 年的产量是一个未知量，用字母 x 表示. 于是 1971 年增加的部分就是 $x\times18\%$ 或 $0.18x$. 这样，就可列出数学等式

$$x+0.18x=200.$$

这是一个含有未知量 x 的等式，现在设法从中求出 x.

先简化等式左端，得到

$$1.18x=200.$$

对新的等式施行变形规则，经转乘为除，得所求的

$$x=\frac{200}{1.18}\approx169\ (\text{万吨}),$$

所以，1970 年该公司钢产量约为 169 万吨.

做为一个典型，我们来看解算这个例题的过程.

首先，根据对问题的分析，把 1970 年的年产量这个未知量记为 x，并列出 x 所满足的等式：$x+0.18x=200$. 含未知量的等式称为方程. 这一步是列方程.

其次，经过化简与变形，从方程中解出了这个未知量 x，$x\approx178$. 这一步是解方程.

在比例中，我们已经列过方程也解过方程. 如已知图纸上的尺寸求实物尺寸的正比问题中，列的方程是

$$30=\frac{a}{100}.$$

这里 a 是未知量，解这个方程得到 $a=3000$ 毫米. 在齿轮啮合的反比问题中，列的方程是

$$20\times30=n_2\times40.$$

其中 n_2 是未知量，从中解出 $n_2=15$.

列方程与解方程是解决实际问题的基本步骤，必须反复进行这种训练.

[例 1] (1) 一个数与 a ($a\neq0$) 的乘积等于 b，求这个数.

列方程：这个数记为 x，于是

$$ax=b \quad (a\neq0).$$

解方程：根据变形规则，转乘为除得到

$$x=\frac{b}{a} \quad (a\neq0).$$

(2) 一个数的倒数与 a 的倒数之和等于 b，求这个数.

列方程：这个数记为 x，则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b.$$

解方程：根据变形规则，移加为减得到

$$\frac{1}{x}=b-\frac{1}{a}=\frac{ab-1}{a}.$$

两数相等倒数也相等，于是所求的数

$$x=\frac{a}{ab-1}.$$

(3) 已知一个矩形之长是宽的二倍，而矩形的面积等于50平方厘米，求这个矩形之宽.

列方程：设矩形之宽为 x，则矩形之长为 $2x$，于是

$$2x\cdot x=50, \quad 或 \quad 2x^2=50.$$

解方程：转乘为除得

$$x^2=25,$$

满足这个方程的 x 有两个：

$$\sqrt{25}=5 \quad 与 \quad -\sqrt{25}=-5,$$

由于矩形之宽必是一正数，方程的一个解 -5 不合要求应予舍去，于是得所求矩形的宽为5厘米.

二、应用举例

[例2] 用两种规格的水管安装管道，一种规格的水管每根长5米，另一种每根长8米. 管道总长155米，共用水管25根，问两种水管各用多少根.

解：这里有两个未知量，但是两者之间有一定联系，它们之和等于25，所以，如果我们设5米长的管道用了 x 根，则8米长的用了 $25-x$ 根.

根据题意，25根管道共长155米，于是可列出方程

$$5x+8(25-x)=155.$$

下面解这个方程.

去括号，并将已知量移到等式右边，得

$$5x-8x=155-200,$$

简化两边,

$$-3x=-45,$$

转乘为除,得

$$x=\frac{-45}{-3}=15,$$

所以5米长的水管应为15根,而8米长的则为 $25-15=10$ 根.

[例3] 某生产队有水稻820亩,用滴滴涕灭杀稻飞虱,每斤滴滴涕掺水400斤,每亩须用稀释后的药水125斤,若每斤滴滴涕价值0.8元,问生产队应支出农药费多少?

解:已知滴滴涕单价,所以只要求出所需的滴滴涕的数量,便可算出生产队支出的农药费.

设所需的滴滴涕为 x 斤. 根据题意,稀释后的药水共需 820×125 斤,这些药水是由 x 斤滴滴涕配成,由于每斤滴滴涕稀释后成为 $1+400=401$ 斤,所以 x 满足方程

$$401x=820\times125=102500.$$

转乘为除,得

$$x=255.6.$$

所需滴滴涕为255.6斤,每斤0.8元,所以生产队应支出农药费 $255.6\times0.8=204.48$ 元.

考虑到与题目所给的条件的关系,滴滴涕的重量较之农药费用更为直接,因此我们把滴滴涕的斤数做为未知量. 这是常见的方法.

[例4] 甲乙两组承担某一工程,甲组单独做需时六天,乙组单独做需时四天,现在,甲组做过一天后两组合作,问还需几天完成?

解：设还需 x 天完成.

根据题目条件，若单独做，甲组一天完成工程的 $\frac{1}{6}$，乙组完成 $\frac{1}{4}$，甲乙两组合作一天可完成工程的 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$. 现在，甲组已独做一天，甲乙两组再合作 x 天便将完成整个工程，于是 x 满足方程

$$\frac{1}{6}+x\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=1,$$

化简左边，

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}x=1,$$

移加为减，

$$\frac{5}{12}x=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

转乘为除，得

$$x=\frac{5}{6}\div\frac{5}{12}=\frac{5}{6}\times\frac{12}{5}=2.$$

所以甲乙两组再合作两天后便将完成整个工程.

习　　题

1. 解下列方程：

$\frac{3}{2}x+1=0$；　　$1-3x=\frac{4}{5}$；

$\frac{2}{3}(1-2x)=7(x+1)$；　　$\frac{x}{14}+1=\frac{x}{7}-1$；

$5(x+2)+16=3x-(4x-3)$；　　$x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}(x-1)\right)=\frac{2}{3}(x+1)$；

$\frac{1}{x}=\frac{3}{5}$；　　$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$；

$1+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$；　　$1+\frac{1}{x-1}=\frac{3}{2}$.

2. 下列各式中，a, b, c, d 是已知数，求 x:

$ax+b=0$;　　　　$ax+b=c$;

$ax+b=3x+4$;　　　　$ax+b=cx+d$;

$a(x+b)=c(x+d)$;　　　　$a-(x-b)=c$;

$\frac{a}{x}+b=c$;　　　　$\frac{a-x}{2}=\frac{b-x}{3}$.

3. 通过等式变形，解出未知数:

(1) 从 $y=y_0+k(x-x_0)$ 中解出 k;

(2) 从 $T=T_0+\alpha(t-t_0)$ 中解出 t;

(3) 从 $v=\frac{s-s_0}{t-t_0}$ 中解出 s;

(4) 从 $k=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$ 中解出 t;

(5) 从 $\frac{n_2-n_0}{n_1-n_0}=\frac{m_2}{m_1}$ 中解出 n_0.

4. 横贯我国东西的陇海铁路与纵贯南北的京广铁路总共长 4083 公里，陇海线长度是京广线的 $\frac{3}{4}$ 还多 16 公里，问陇海、京广两线各长多少公里?

5. 长江、黄河共长 10645 公里，长江比黄河长 995 公里，问长江、黄河各长多少?

6. 把 16 亩土地分为两份，试种两种棉花，要使两份面积之比为 3:5，问两部分面积各为多少?

7. 贫农王大爷租种恶霸地主刘文采的两亩薄地，收下的粮食全部去交租，经过四道关卡只剩下 60 斤粮食，是原来的 $\frac{1}{2}$ 还少 20 斤，问王大爷两亩地共生产多少粮食? 刘文采的四道关卡剥夺了王大爷多少粮食?

8. 一个铺路任务，甲队 4 天完成，乙队 6 天完成，若两队合作，几天能完成?

9. 生产队打算把含氨 20% 的氨水稀释成含氨 0.01% 的氨水 500 斤，问需用含氨 20% 的氨水多少斤?

10. 生产队现有水浇地 108 亩，旱地 60 亩. 现在决定把一部分的旱地

改成水浇地，使得旱地成为水浇地的 20%，问改成水浇地的旱地是多少？

11. 解放军某部以 5 公里/小时的速度开赴某地，走了 3 小时，师部通讯员骑摩托车传达紧急命令，要求在半小时内传到这个部队，问通讯员每小时应走多少里？

12. 轮船顺水航行 72 公里所需的时间与逆水航行 42 公里所需的时间相等. 已知水流速度是 2 公里/小时，求轮船在静水中的速度？

13. 转速为 1440 转/分的电动机用皮带轮带动转速为 617 转/分的小钢磨，如果电机皮带轮直径为 120 毫米，问小钢磨的直径为多大才能配合好.

14. 金放在水里称重量减轻 $\frac{1}{19}$，银放在水里称重量减轻 $\frac{1}{10}$. 一块金与银的合金重 530 克，在水里称轻了 35 克，问这块合金含金银各多少？

复 习 题

1. 依大小顺序排列各组数:

(1) -100, 100, $\frac{1}{100}$, -0.01, 0;

(2) $\frac{2}{7}$, $-\frac{3}{8}$, 0, 0.45, $-\frac{4}{9}$.

2. 将下列各数化为有限小数或循环小数:

$\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{5}{8}$.

3. 用四位小数近似表出下列各无理数:

$\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}+1$; $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2π.

4. 求平方根:

$\sqrt{3^2+4^2}$; $\sqrt{12^2+5^2}$; $\sqrt{24^2+7^2}$.

5. 五天的最高温度依次为:

零上 2.5°C, 零上 1°C, 零下 1.5°C, 零度, 零下 2°C.

(1) 分别求出前后两天最高温度差；(2) 求五天的平均最高温度.

6. 用字母表示:

(1) a、b 和的反号数等于 a、b 反号数之和;

(2) a 与 b 之差等于 b 与 a 之差的反号数;

(3) a 加上 b 等于 a 减去 b 的反号数.

7. 判断下面这句话是对还是错,并说明理由:

"加的结果增大了,减的结果变小了."

8. 在对于算式 $-a-b$ 的下述四种理解中,

(1) "负 a 加负 b"; (2) "负 a 减正 b";

(3) "零减 a 再减 b"; (4) "负 a 减负 b",

哪些是对的,哪些是错的?

9. 判断哪些等式是对的,哪些等式是错的:

$\frac{-(a-b)}{c}=-\frac{a-b}{c}$; $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$;

$\frac{-a-b}{c}=-\frac{a-b}{c}$; $\frac{a-b}{-c}=-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$;

$\frac{a-b}{-c}=-\frac{a-b}{c}$; $-\frac{a-b}{c}=-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$;

$\frac{a-b}{c}=-\frac{b-a}{c}$; $-\frac{a-b}{c}=\frac{b}{c}-\frac{a}{c}$.

10. 设 $a=b$, $c=d$, 求证:

$a+c=b+d$; $a-c=b-d$; $ac=bd$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

11. 如果 $a=b$, 那末 $a^2=b^2$; 反过来, 从 $a^2=b^2$ 就断定 $a=b$ 对不对? 说明理由.

12. 如果把 15 克的食盐(氯化钠)做为溶质稀释在 135 克的水里, 就得到 150 克的食盐溶液. 溶质重量与溶液重量之比称为浓度, 即

$$浓度=\frac{溶质重量}{溶液重量},$$

上面配制的食盐溶液的

$$浓度=\frac{15}{150}=\frac{1}{10}\times 100\%=10\%,$$

这表示若取 100 克的食盐溶液, 其中有 10 克食盐.

说明: 浓度不变, 溶质重量与溶液重量成正比; 溶液稀释 (溶质重

量不变)，浓度与溶液重量成反比。

13．配制浓度为 15% 的氢氧化钠溶液 720 克，需要氢氧化钠多少克?

14．18 克的氢氧化钠能配成浓度为 5% 的氢氧化钠溶液多少克?

15．浓度为 40% 的硝酸溶液 250 克，加水稀释能配成浓度为 25% 的溶液多少克?

16．浓度为 16% 的食盐(氯化钠)溶液 350 克，经蒸发后溶液变成 200 克，问这时的浓度是多少?

17．今有氢氧化钠 35 克，要配制成浓度为 27% 的氢氧化钠溶液，问应加水多少克?

第二章　代　数　式

从第一章已经知道，在研究问题的过程中，常要遇到包含字母的算式，这种用运算符号把字母、数字等联结起来的算式称为代数式。例如 vt、$\frac{1}{2}ah$、$a+b$、abc、$\frac{s}{v+u}$、$\sqrt{a}$、$\sqrt{a^2+b^2}$、$2x^2-50$ 等都是代数式．本章讨论代数式的分类（整式、分式、根式）及其运算．

第一节　正整数指数幂

一、正整数指数幂的概念

在生产实践中，常遇到相同数的连乘，即乘方运算．如边长为 2 的正方形的面积等于 2×2，边长为 2 的立方体的体积等于 $2\times2\times2$，我们把 2×2 记作 2^2，$2\times2\times2$ 记作 2^3．一般地，$a\cdot a$ 可记作 a^2，$a\cdot a\cdot a$ 可记作 a^3．对任何正整数 n，n 个 a 的连乘可记作

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a},$$

其中 a 称为底数，n 称为指数，a^n 称为 a 的 n 次幂，或 a 的 n 次方，简称幂．

例如　$10\times10=10^2=100$,

$10\times10\times10\times10=10^4=10000$,

$$(-2)\cdot(-2)=(-2)^2=4,$$
$$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=(-2)^3=-8.$$

要注意，$(-2)^2$ 和 -2^2 是不同的．$(-2)^2$ 是 -2 的平方，即 $+4$；而 -2^2 是 2 的平方的反号数，即 -4．

在工程技术和科学实验中，常将很大的数简写成 $M\times10^n$ 的形式，这里 M 是界于 1 与 10 之间的数，n 为正整数．

例如，电波的传播速度约为每秒钟 300000000 米，可写成 3×10^8 米/秒．

又如，地球与太阳的距离约为 150000000 公里，可写成 1.5×10^8 公里（因为 $150000000=1.5\times100000000=1.5\times10^8$）．

二、正整数指数幂的运算规则

下面，从乘方概念推导正整数指数幂的一般运算规则．

1．同底数幂的乘与除

先讨论同底数幂的乘法，例如

$$a^2\cdot a^3=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5=a^{2+3}.$$

一般地，对于任何正整数 m，n，可推导出同底数幂的乘法规则：

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{个}a}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}=a^{m+n},$$

即

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

这就是说，同底数幂相乘，其积是底数不变，指数相加．

［例 1］ 计算：(1) $10^8\times10$； (2) $3^2\times3^8$；

(3) $b^2\cdot b^m$； (4) $x^2\cdot x^n\cdot x^3$．

解：(1) $10^8\times10=10^8\times10^1=10^{8+1}=10^9$；

(2) $3^2\times3^3=3^{2+3}=3^5$;

(3) $b^2\cdot b^m=b^{2+m}$;

(4) $x^2\cdot x^n\cdot x^3=x^{2+n+3}=x^{5+n}$.

再讨论同底数幂的除法，例如

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}=a^2=a^{5-3}.$$

一般地，对于正整数 m 和 n，其中 m 大于 n，有

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}}=a^{m-n}\quad(a\neq0),$$

即

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad(a\neq0).$$

这就是同底数幂的除法规则：同底数幂相除，其商是底数不变，指数是分子的指数减去分母的指数.

通过上述推导看出，同底数幂的乘除法运算，可转化为指数的加减法运算.

[例 2] 计算：(1) $\dfrac{(2-x)^3}{2-x}$；(2) $\dfrac{a^{m+1}}{a^{m-1}}$.

解：(1) $\dfrac{(2-x)^3}{2-x}=(2-x)^{3-1}=(2-x)^2$;

(2) $\dfrac{a^{m+1}}{a^{m-1}}=a^{(m+1)-(m-1)}=a^2$.

[例 3] 要节约用粮．如果每人每天节约一粒米，全国人民一天就可节约四万一千余斤，试问一年能节约米多少斤？

解：四万一千斤米可写成 4.1×10^4 斤，一年 365 天可写成 3.65×10^2，这样一年节约的米是

$$4.1\times10^4\times3.65\times10^2=4.1\times3.65\times10^4\times10^2$$
$$=14.965\times10^6$$
$$=1.4965\times10^1\times10^6$$
$$=1.4965\times10^7.$$

即一年节约的米约为一千四百九十七万斤.

[例 4] 地球与太阳相隔 15×10^7 公里，光的速度是 3×10^5 公里/秒，问太阳光射到地球上需几秒？

解：因为 $\frac{\text{距离}}{\text{速度}}=$时间，将已知数值代入，得到

$$\frac{15\times10^7}{3\times10^5}=5\times10^{7-5}=5\times10^2=500\ (\text{秒}).$$

答：太阳光射到地球上需要500秒.

2. 幂的乘方

由于同底数幂的乘法，可转化为指数的加法，所以对任何正整数 m 和 n，

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}=a^{mn},$$

即

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

这就是幂的乘方规则：幂的乘方，其结果是底数不变，指数相乘.

[例 5] 计算 $(a^3)^2\cdot2(a^2)^4$.

解：$(a^3)^2\cdot2(a^2)^4=2a^{3\times2}\cdot a^{2\times4}=2a^6\cdot a^8=2a^{6+8}=2a^{14}$.

3. 积与商的幂

对于任何正整数 n，可推导出

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n.$$

这就是说，积的幂等于幂的积.

例如 $(ab)^3=(ab)(ab)(ab)=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b=a^3\cdot b^3$.

又对于任何正整数 n，可推导出

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(b\neq 0).$$

这就是说，商的幂等于幂的商.

例如 $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}$.

[例 6] 计算：(1) $(2a)^3\cdot(4a)^2$； (2) $(3x^2y)^3$；

(3) $\left(\frac{2y}{\sqrt{7}x^2}\right)^2$.

解：(1) $(2a)^3\cdot(4a)^2=2^3\cdot a^3\cdot 4^2\cdot a^2=8\cdot 16\cdot a^{3+2}=128a^5$；

(2) $(3x^2y)^3=3^3\cdot(x^2)^3y^3=27x^6y^3$；

(3) $\left(\frac{2y}{\sqrt{7}x^2}\right)^2=\frac{2^2\cdot y^2}{(\sqrt{7})^2(x^2)^2}=\frac{4y^2}{7x^4}$.

[例 7] 计算：(1) $\frac{0.15^5}{0.15^3}$； (2) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$；

(3) $\left(\frac{9a^3b^4c^3}{a^2b^2c}\right)^2$； (4) $(a+x)^2\cdot(a+x)^3\div(a+x)^4$.

解：(1) $\frac{0.15^5}{0.15^3}=(0.15)^{5-3}=0.15^2=0.0225$；

(2) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3=\left[\frac{4}{9}\right]^3=\frac{64}{729}$；

(3) $\left(\frac{9a^3b^4c^3}{a^2b^2c}\right)^2=(9a^{3-2}b^{4-2}c^{3-1})^2=81a^2b^4c^4$；

(4) $(a+x)^2\cdot(a+x)^3\div(a+x)^4$

$=(a+x)^{2+3-4}=(a+x)^1=a+x$.

小　　结

1. 用运算符号把字母、数字等联结起来的算式，称为代数式.

2. n 个 a 连乘的积称为 a 的 n 次幂或 n 次方，记为

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a},$$

其中 a 称为底数，n 称为指数.

3. 幂的运算符合以下规则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0),$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

即同底数幂的乘、除运算，可以分别转化为指数的加、减运算；幂的乘方运算，可以转化为指数相乘；积、商的幂分别等于幂的积、商.

习　题

1. 回答下列各问题:

(1) 2^3 和 3^2 有什么不同，它们各表示什么意思?

(2) 分别算出底数是 -3、$\sqrt{2}$、$\frac{1}{4}$，指数是 2 的三个乘方的值;

(3) $4x$ 与 x^4 的意义是否相同，为什么?

2. 把下列各数写成 $M \times 10^n$ 的形式(M 是界于 1 与 10 之间的数，n 为正整数):

(1) 我国面积约为九百六十万平方公里;

(2) 某种电子计算机运算速度为每秒 1500000 次;

(3) 地球的赤道半径约为 637800000 厘米.

3. 下列计算有没有错误? 如有错，请改正:

(1) $x^2 \cdot x^3 = x^5$;　　　　(2) $(3ab)^2 = 6a^2b^2$;

(3) $(\sqrt{2}x^3)^2=2x^9$;　　(4) $(-ab^2)^3=a^3b^6$;

(5) $[(-x)^3]^2=-x^6$;　　(6) $(2^3)^2=(2^2)^3$;

(7) $\left(\frac{8xy}{5t}\right)^2=\frac{64x^2y^2}{5t}$;　　(8) $(4y^2\cdot 2y)^2=64y^6$.

4. 计算下列各题:

(1) $5x^3\cdot 4x^3\cdot 2x$;　　(2) $(6x^2y^2)^2$;

(3) $4x^6y^2\div 2x^3y$;　　(4) $[(-3x^3y)^2]^3$;

(5) $\left(\frac{2^6\times 8}{4^2}\right)^2$;　　(6) $\left(\frac{-a^3b^4}{a^2c}\right)^2$;

(7) $-5x(-10x^4)^2$;　　(8) $\left(\frac{2}{3}a^2y^n\right)^3$;

(9) $\left[\left(2x^4\frac{1}{y}\right)^3\right]^2$;　　(10) $\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]^3$.

5. 一公斤铀在裂变时，放出的热量是燃烧一公斤最好的煤放出热量的 1.8×10^6 倍. 已知燃烧一公斤好煤放出热量 8×10^3 千卡，求一公斤铀裂变时放出的热量(卡是热量的一种单位).

6. 计算星球间距离以光年为单位 (1 光年表示光在一年时间里所走路程). 已知光的速度为每秒 300000 公里，一年约有 3.1536×10^7 秒钟，试求一光年合多少公里.

7. 太阳质量约为 1.98×10^{33} 克，地球质量是 5.98×10^{13} 亿吨，而 1 吨为 10^6 克，问太阳质量是地球质量的几倍?

第二节　整　　式

一、整式的概念

象 vt、$\frac{1}{2}a^2$、$2\pi r$、$\pi R^2-\pi r^2$、$x^2+\frac{2}{5}x-3$ 一类代数式，都是用加、减、乘运算把数字、字母等联系起来的算式(注意，这里对数字可以作除法运算)，我们把这种代数式称为**整式**.

在上述几个整式中，前面三个只包含字母的乘法运算，不

包含加减运算，称为单项式；后面两个整式是由几个单项式经过加减运算得到的，称为多项式.

单项式中字母前面的数字称为单项式的数字系数．例如 vt、$\frac{1}{2}a^2$、$2\pi r$ 的系数依次为 1、$\frac{1}{2}$、2π. 字母部分完全相同的单项式，就称为同类项．如 $3ab$ 与 $5ab$ 字母部分都是 ab，因而是同类项；再如 $10y^2$ 与 $\sqrt{3}y^2$；$\frac{1}{2}mx$ 与 $-4mx$ 也分别是同类项.

多项式 $3x^2y-4x^2+2y+5$ 有四项：$3x^2y$、$-4x^2$、$2y$、5，前三项中字母的指数之和依次为 3、2、1，分别称这些项为原多项式的三次项、二次项、一次项，最后一项不含字母，叫常数项．多项式最高次项的次数称为多项式的次数．上面的多项式是三次式.

多项式的次数有时是对特定的字母说的，如

$$ax^2+bx+c$$

是字母 x 的二次式，称为 x 的二次三项式，其中，字母 a 与 b 分别叫做二次项与一次项的文字系数.

把一个多项式的各项按次数大小“排好队”，各项次数从大到小排列的叫降幂排列；从小到大排列的叫升幂排列．如

$$4x^3+x^2+2x-2\cdots\cdots\cdots\text{降幂排列},$$

$$-2+2x+x^2+4x^3\cdots\cdots\cdots\text{升幂排列}.$$

我们较多地用降幂来排列多项式.

二、整式的加减法

先介绍多项式中同类项的合并，如

$$2a+3a=5a;$$

$$7x-4x-x=2x;$$
$$3a+2b+5a-4b=(3a+5a)+(2b-4b)=8a-2b.$$

再进行多项式的加减运算.

[例 1] 计算：(1) $(2x^2-5x-4)+(3x^2+4x-2)$；

(2) $(-6x^3y^2+4x^2y+7)-\left(\frac{3}{2}x^2y+0.5y^2x^3+5\right)$.

解：(1) $(2x^2-5x-4)+(3x^2+4x-2)$
$$=2x^2-5x-4+3x^2+4x-2$$
$$=(2+3)x^2+(-5+4)x+(-4-2)$$
$$=5x^2-x-6;$$

(2) $(-6x^3y^2+4x^2y+7)-\left(\frac{3}{2}x^2y+0.5y^2x^3+5\right)$
$$=-6x^3y^2+4x^2y+7-\frac{3}{2}x^2y-0.5x^3y^2-5$$
$$=(-6-0.5)x^3y^2+\left(4-\frac{3}{2}\right)x^2y+(7-5)$$
$$=-6.5x^3y^2+2.5x^2y+2.$$

[例 2] 用船运一批物资到某地，第一次用载重量为 a 吨的船 6 艘，载重量为 b 吨的船 5 艘；第二次再增加这两种船各 2 艘和载重量为 c 吨的船 1 艘，恰好运完. 问这批物资共多少吨？

解：根据题意，第一次运的物资为 $(6a+5b)$ 吨，第二次运的物资比第一次增加了 $(2a+2b+c)$ 吨，所以第二次运的物资为 $(8a+7b+c)$ 吨.

因两次正好运完，故这批物资共有
$$(6a+5b)+(8a+7b+c)$$
$$=6a+5b+8a+7b+c$$
$$=14a+12b+c \text{ (吨)}.$$

通过上述各例可知，在整式的加减运算中，主要抓住"去括号"和"合并同类项"这两种运算．特别要注意，当括号前为负号时，去括号后，原括号内的各项都要改变符号．

在代数式中，将字母所代表的具体数值代进去，计算的结果，就是这个代数式的值．

［例3］ 将 $5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$ 化简，并求 $a=-2.25$，$b=\sqrt{3}$ 时原式之值．

解：$5ab^2-\{2a^2b-[3ab^2-(4ab^2-2a^2b)]\}$

$$=5ab^2-\{2a^2b-[-ab^2+2a^2b]\}$$

$$=5ab^2-\{2a^2b+ab^2-2a^2b\}=4ab^2.$$

把 $a=-2.25$，$b=\sqrt{3}$ 代入上式，就得原式的值为

$$4(-2.25)(\sqrt{3})^2=-27.$$

从这里看出，通过化简再求值，比直接代入原式求值简便．

三、整式的乘法

根据幂的运算规律，就可进行整式的乘法运算．

［例4］ 计算：(1) $(-2x^2y)\cdot 3x$；

(2) $4a^3x\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^4x^2\right)$.

解：将数字系数与数字系数相乘，字母按幂的乘法规则进行运算．

(1) $(-2x^2y)\cdot 3x=(-2\times 3)(x^2\cdot x)y$

$$=-6x^{2+1}y=-6x^3y;$$

(2) $4a^3x\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^4x^2\right)=4\left(-\frac{1}{2}\right)(a^3\cdot a)b^4(x\cdot x^2)$

$$=-2a^4b^4x^3.$$

[例 5] 计算：(1) $(2a+b-4c+3d)e$;

(2) $(3x^2+4x-5)(-4x)$； (3) $x^n(-x^{n+1}+x^n+x^{n-1})$.

解：根据分配律可得：

(1) $(2a+b-4c+3d)e=2ae+be-4ce+3de$;

(2) $(3x^2+4x-5)(-4x)$

$$=3x^2(-4x)+4x(-4x)-5(-4x)$$

$$=-12x^3-16x^2+20x;$$

(3) $x^n(-x^{n+1}+x^n+x^{n-1})=x^n(-x^{n+1})+x^n\cdot x^n+x^n\cdot x^{n-1}$

$$=-x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}.$$

[例 6] 某钢铁厂生产的钢锭的截面如图 2-1 所示，计算它的截面积.

解：设钢锭截面积为 S，如图 2-1 有

$$S=S_1+2S_2+4S_3.$$

由长方形及圆的面积公式得

$$S_1=a(a-2R),$$

$$S_2=R(a-2R),$$

$$S_3=\frac{1}{4}\pi R^2.$$

图 2-1

所以

$$S=S_1+2S_2+4S_3=a(a-2R)+2R(a-2R)+4\cdot\frac{1}{4}\pi R^2$$

$$=a^2-2aR+2aR-4R^2+\pi R^2=a^2-4R^2+\pi R^2.$$

由此得知，单项式乘多项式，先将单项式与多项式的各项相乘，再把所得的积相加.

[例 7] 计算：(1) $(x+a)(x+b)$;

(2) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$； (3) $(x-3)(2x^2+x-1)$.

解：(1) 先把 $(x+a)$ 看作一个数，利用分配律，于是得

$$(x+a)(x+b)=x(x+a)+b(x+a)$$
$$=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x^2+(a+b)x+ab;$$

(2) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=x(x-\sqrt{5})+\sqrt{5}(x-\sqrt{5})$
$$=x^2-\sqrt{5}x+\sqrt{5}x-(\sqrt{5})^2=x^2-5;$$

(3) $(x-3)(2x^2+x-1)=x(2x^2+x-1)-3(2x^2+x-1)$
$$=2x^3+x^2-x-6x^2-3x+3=2x^3-5x^2-4x+3.$$

由此得知，多项式乘多项式，先将一个多项式的每一项与另一个多项式的每一项相乘，再把所得的积相加.

四、几个常用的乘法公式

运用多项式相乘方法，可以得到下面几个常用公式.

1. 两数和的平方公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

证 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2.$$

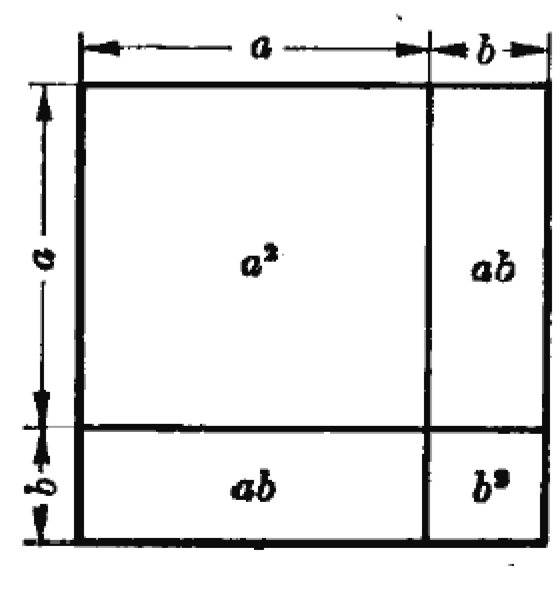


图 2-2

这个公式也可用几何图形来说明. 如图 2-2 中，边长为 $a+b$ 的正方形面积是 $(a+b)^2$，而这正方形是由面积依次为 a^2 与 b^2 的两个正方形和两个面积为 ab 的长方形所组成，所以

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

2. 两数差的平方公式：

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

3．两数和与差的乘积公式(亦称平方差公式)：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这两个公式，由读者自证.

此外，还有下面四个乘法公式：

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (两数和的立方公式)；

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (两数差的立方公式)；

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (立方和公式)；

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (立方差公式).

这些公式以后常用到，必须在反复运用的基础上加以记忆.

[例8] 计算：(1) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$；

(2) $\left(-x+\frac{\sqrt{2}}{2}y^3\right)^2$； (3) $(a+b+c)^2$.

解：(1) $(x+1)(x-1)(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)$

$$=(x^2)^2-1^2=x^4-1;$$

(2) 将$(-x)$看作 a，$\frac{\sqrt{2}}{2}y^3$ 看作 b，利用两数和的平方公式有

$$\left(-x+\frac{\sqrt{2}}{2}y^3\right)^2=(-x)^2+2(-x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^3\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y^3\right)^2$$

$$=x^2-\sqrt{2}xy^3+\frac{1}{2}y^6;$$

(3) $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

[例9] 某机械零件是由边长为 $b+c$ 的正方形板中间冲去一个如图 2-3 所示的正方孔而成，求此零件的面积.

解：设所求零件面积为 S，从图看出大正方形 S_1 减去小

正方形孔的面积 S_2 就等于零件的面积 S，即

$$S=S_1-S_2,$$

而

$$S_1=(b+c)^2, \qquad S_2=(b-c)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}S&=(b+c)^2-(b-c)^2\\&=b^2+2bc+c^2-(b^2-2bc+c^2)\\&=4bc.\end{aligned}$$

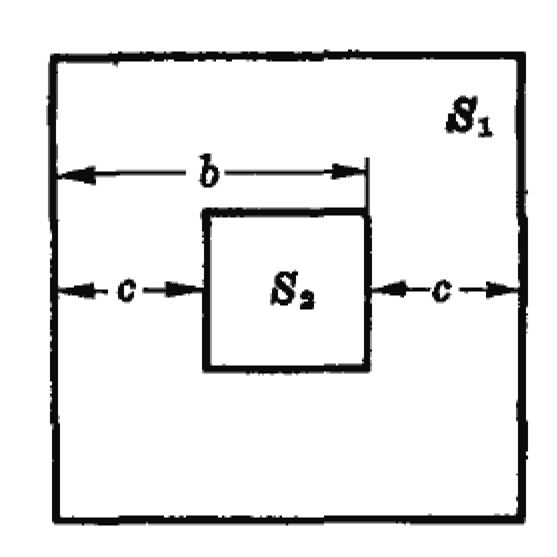


图 2-3

[例 10] 计算：(1) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$；

(2) $(2x-3y)^3$.

解：(1) 利用立方和公式，将 $3x$ 看作 a，$2y$ 看作 b，则

$$\begin{aligned}&(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)\\&\quad=(3x+2y)[(3x)^2-(3x)(2y)+(2y)^2]\\&\quad=(3x)^3+(2y)^3=27x^3+8y^3;\end{aligned}$$

(2) 利用两数差的立方公式，得

$$\begin{aligned}(2x-3y)^3&=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3\\&=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.\end{aligned}$$

[例 11] 利用乘法公式计算：

(1) 999^2； (2) 102×98.

解：(1) $999^2=(1000-1)^2=1000^2-2\times1000+1$

$$=1000000-2000+1=998001;$$

或利用 $a^2=(a+b)(a-b)+b^2$ 得，

$$\begin{aligned}999^2&=(999+1)(999-1)+1^2\\&=998000+1=998001;\end{aligned}$$

(2) $102\times98=(100+2)(100-2)$

$$\begin{aligned}&=100^2-2^2\\&=10000-4=9996.\end{aligned}$$

小　　结

1．整式的加减，主要抓住去括号和合并同类项的运算.

2．整式的乘法：单项式相乘是系数与系数相乘，字母按幂的乘法规则进行运算；多项式相乘利用分配律进行，再合并整理.

3．要熟练运用乘法公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$$

习　　题

1．合并下列各多项式的同类项：

(1) $3y^2-\frac{1}{2}y^2+0.78y^2$;

(2) $\frac{2}{3}a^2+\frac{5}{6}a^2-\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a^2$;

(3) $\frac{PH^2}{4}-\frac{PH^2}{8}+\frac{1}{5}PH^2$;

(4) $23x^2-\sqrt{5}xy+8xy-24x^2+y^2$;

(5) $5ax-4a^2x^2-8ax^2+3ax-ax^2-4a^2x^2$.

2．把下列两式分别按 x 的降幂和升幂排列后，求 $x=\sqrt{2}$ 时，两式的值：

(1) $-7+x^5-3x^3+4x-5x^2+6x^4$;

(2) $-6x+\sqrt{2}x^3-4x^2-1$.

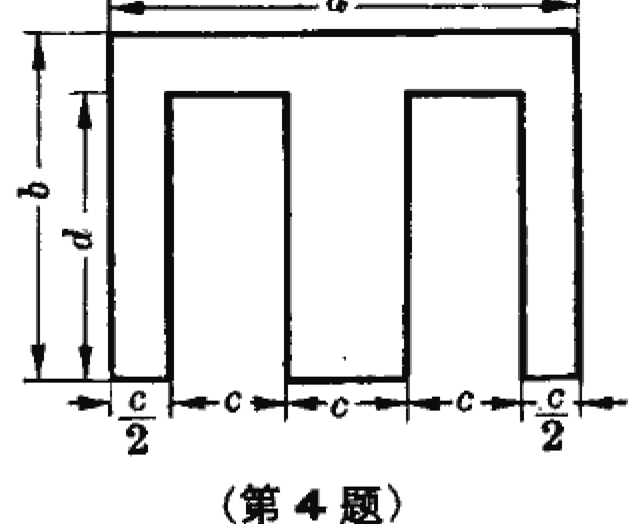
3．下面各式这样合并同类项对吗？如错，请改正.

(1) $2x+2y=4xy$;　　(2) $7a-2b=5ab$;

(3) $3a^2-a^2=3$;　　(4) $9a^2b-9ab^2=0$;

(5) $-7xy+7yx=0$;　　(6) $3x^2-5x^2=2x^2$.

4. 写出右图变压器中硅钢片面积的计算式．如 a、b、c、d 分别为 80、60、20、50 毫米，问此硅钢片面积是多少?



（第 4 题）

5. 计算:

(1) $(x^2-2xy+3y^2)-(2x^2+3xy-4y^2)$;

(2) $-(h^2-g^2)+[-2hg-(h^2+g^2)]$;

(3) $(9xy+2y)-(10xy+8y-2x)$;

(4) $(10x^3-6x^2+6x-4)$
$+(9x^3-2x^2+2)$;

(5) $(\sqrt{2}a^2-3b^2)-[-(a^2-2ab+b^2)+(\sqrt{2}a^2-2ab-3b^2)]$;

(6) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$;

(7) $3x^2-(-4xy)+6xy+(-y)^2+(\sqrt{2}x)^2+(-3y^2)$.

6. 计算:

(1) $(2ab^2)^3(-3a^2bc)^2$;　　(2) $(4a^2b^2)^2\left(-\frac{5}{4}ac^3\right)\left(\frac{1}{2}a^2c^3\right)^3$;

(3) $2(a+b)^m[-3(a+b)^n]$;

(4) $a(a-b-c)+b(a+b-c)-c(-a-b+c)$;

(5) $\left(\frac{9}{4}x^2y^3z\right)\left(-\frac{2}{3}x^2z^2\right)\left(\frac{2}{3}y^5\right)$;

(6) $\frac{1}{3}xy\left(\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}xy^2-\frac{5}{6}y^2\right)$.

7. 计算:

(1) $(-a-b)(-c-d)$;　　(2) $(x-2)(x^2-3x-4)$;

(3) $(1+x^2)(1-x^2)$;　　(4) $(x+y+z)(x+y-z)$;

(5) $\left(\frac{2}{3}m+n\right)\left(\frac{2}{3}m-n\right)$;　　(6) $\left(x^2-\frac{1}{2}y\right)^2$;

(7) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$;　(8) $(2x+\sqrt{3y})(2x-\sqrt{3y})$;

(9) $(a+b)(a^2+b^2)(a-b)(a^4+b^4)$;

(10) $(a-b-c)^2$.

8. 下列等式是否正确，为什么?

(1) $(a-b)^2=(b-a)^2$;　　(2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;

(3) $(a+b)(a-b)=(b+a)(b-a)$　$(a\neq b)$;

(4) $(a+b)^2=a^2+b^2$;

(5) $(a+b)(a-b)=(-a-b)(-a+b)\quad(a\neq b)$;

(6) $(a-b)^2=a^2-b^2$.

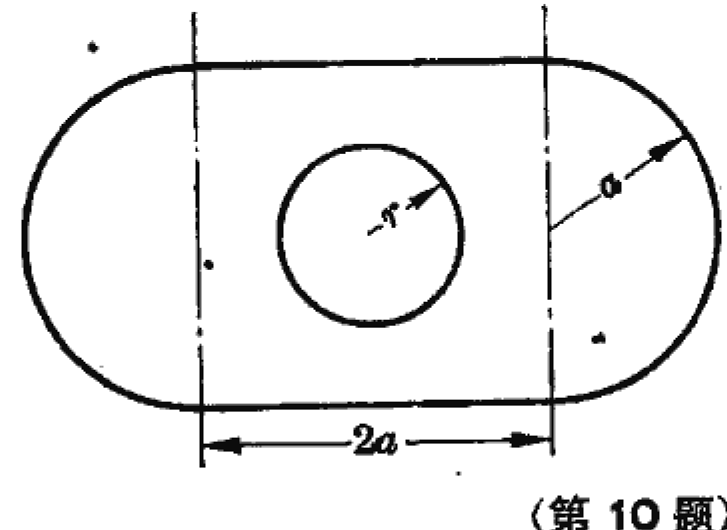
9. 利用乘法公式计算:

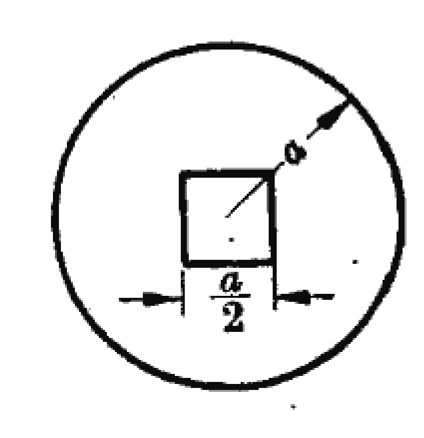
(1) 298^2; (2) 103×97;

(3) 95^2; (4) 1001^2;

(5) 9.1×8.9.

10. 某厂制成的两种异型钢管，其截面如图所示. 试分别写出计算截面积的公式. 如 $a=4$ 厘米, $r=2$ 厘米，问各截面的面积是多少?





（第 10 题）

11. 用乘法公式计算:

(1) $3(2-y)^2-4(y-5)^2$; (2) $\left(\frac{7}{3}x+\frac{\sqrt{5}}{2}y\right)^2$;

(3) $(-a^2+a-5)(-a^2+a+5)$; (4) $(2x^3-3y^2)^3$;

(5) $\left(\frac{1}{2}x^2+y\right)^3$;

(6) $(4x+1)^2\cdot(4x-1)^2$;

(7) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)$;

(8) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$;

(9) $\left(\frac{1}{2}R-2t\right)\left(\frac{1}{4}R^2+Rt+4t^2\right)$;

(10) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$;

(11) $(x+2y+3z-w)(x+2y-3z+w)$;

(12) $(x+y+z)(x+y-z)[(x+y)^2+z^2]$;

(13) $(x+y-z)^2-(x-y+z)(x+y-z)$.

第三节　分解因式

在讨论分数的约分和通分时，经常需要把分数的分子和分母各分成几个因数相乘的形式．类似地，在代数中，也常需要将一个多项式分成几个整式相乘的形式．

几个整式相乘，其中每一个整式都叫做乘积的因式，例如，从

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

可知 $a+b$ 和 $a-b$ 都是 a^2-b^2 的因式．反过来，也可以把多项式 a^2-b^2 分成两个因式 $a+b$ 和 $a-b$ 的乘积，即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

这叫做分解因式，即

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{分解因式}}{\overset{\text{乘法运算}}{\rightleftarrows}}a^2-b^2.$$

下面介绍几种分解因式的方法．

一、提取公因式

根据分配律 $a(b+c)=ab+ac$，多项式 $ab+ac$ 可分解为

$$ab+ac=a(b+c).$$

这里，a 是原式 $ab+ac$ 两项中的公因式，把各项的公因式 a 提出来就得到 $a(b+c)$．

[例 1]　分解因式：

(1) $x^2y+2xy^2-x^2y^2$；　　(2) $-45a^3b-25a^2b^2-5a^2b$．

解：(1) 原式各项有公因式 xy，所以提出因式 xy，得

$$x^2y+2xy^2-x^2y^2=xy\cdot x+xy\cdot 2y-(xy)^2$$
$$=xy(x+2y-xy).$$

(2) 原式各项有公因式 $-5a^2b$，所以

$$-45a^3b-25a^2b^2-5a^2b$$
$$=(-5a^2b)(9a)+(-5a^2b)(5b)+(-5a^2b)(1)$$
$$=-5a^2b(9a+5b+1).$$

多项式的某项本身是公因式时（如本例(2)中第三项 $-5a^2b$），提出公因式后，在括号里不要忘记写上数1.

[例2] 有一块钢片，如图2-4所示，$a=1.7$，$b=1.5$，$c=0.5$，试求这钢片的面积.

解：设此钢片的面积为 S，它由两个长方形所组成，面积分别为 ab 和 ac，所以

$$S=ab+ac. \qquad (1)$$

提出公因式 a，得

$$S=a(b+c). \qquad (2)$$

将 $a=1.7$，$b=1.5$，$c=0.5$ 分别代入(1)、(2)两式进行计算，得

$$S=ab+ac$$
$$=1.7\times1.5+1.7\times0.5$$
$$=2.55+0.85=3.4,$$

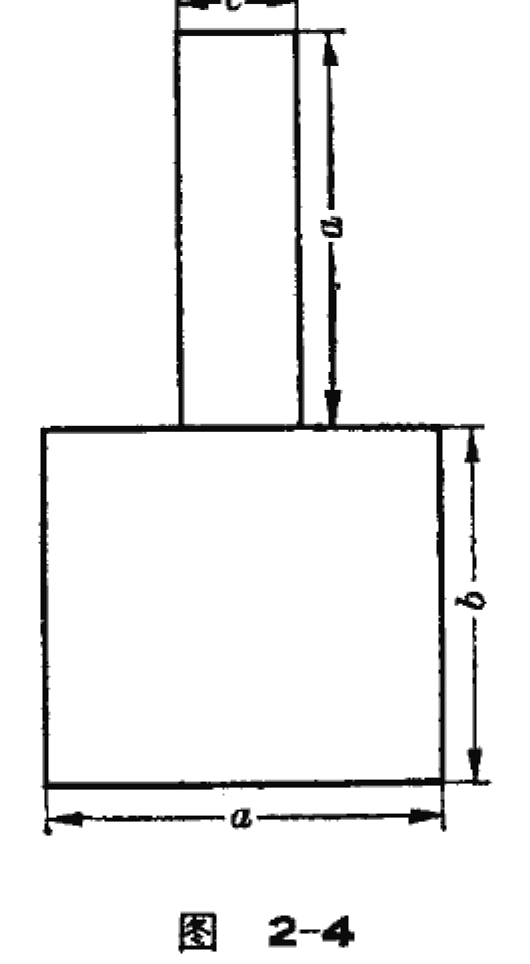


图 2-4

$$S=a(b+c)=1.7(1.5+0.5)=1.7\times2=3.4.$$

从这里看出本例提出公因式后，运算较简便.

[例3] 分解因式 $ax+ay+bx+by$.

解：本式各项没有公因式，如将它们分组，可看出，第一、二项有公因式 a，第三、四项有公因式 b，于是

$$ax+ay=a(x+y),$$
$$bx+by=b(x+y).$$

这两式中含有公因式 $(x+y)$，因此

$$\begin{aligned}&ax+ay+bx+by\\&\quad=a(x+y)+b(x+y)\\&\quad=(x+y)(a+b).\end{aligned}$$

二、利用乘法公式

既然多项式相乘反过来是分解因式，所以可以利用乘法公式来分解因式.

常用的公式有

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

[例 4] 分解因式:

(1) $16a^2-9b^2$;

(2) $-kx^3+2kx^2-kx$.

解: (1) 原式中,因 $16a^2=(4a)^2$, $9b^2=(3b)^2$, 应用两数平方差公式,有

$$16a^2-9b^2=(4a)^2-(3b)^2=(4a+3b)(4a-3b);$$

(2) $$-kx^3+2kx^2-kx=-kx(x^2-2x+1)$$
$$=-kx(x-1)^2.$$

[例 5] 分解因式:

(1) $9x^2+12xy+4y^2$;

(2) $x^2-2xy+y^2-36$;

(3) $8x^3-27y^3$.

解: (1) 原式中,因 $9x^2=(3x)^2$, $4y^2=(2y)^2$, 而

$$12xy=2(3x)(2y),$$

所以利用两数和的平方公式，得

$$9x^2+12xy+4y^2=(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$$
$$=(3x+2y)^2;$$

(2) 原式不能一次直接用公式进行分解，但我们看出前三项是两数差的平方，再利用平方差公式即可分解.

$$x^2-2xy+y^2-36=(x^2-2xy+y^2)-6^2$$
$$=(x-y)^2-6^2$$
$$=(x-y+6)(x-y-6);$$

(3) 原式中，因 $8x^3=(2x)^3$, $27y^3=(3y)^3$，利用立方差公式，得

$$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$$
$$=(2x-3y)[(2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2]$$
$$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2).$$

[例 6] 分解因式 $x^4+x^2y^2+y^4$.

解：$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot y^2+(y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

[例 7] 计算圆形钢管钢材体积时，先量出钢管外径长 $CB=d$，再量出壁厚 $CA=b$ 和管长 h，如图 2-5，然后利用公式

$$V=\pi hb(d-b)$$

来计算. 试推导此公式.

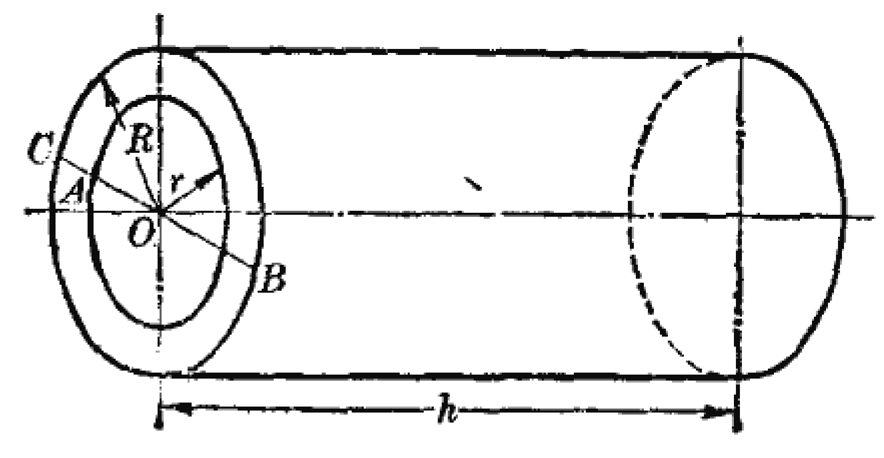


图 2-5

解：钢管体积 V 等于大圆柱体体积 V_1 减去小圆柱体体积 V_2，而

$V_1=\pi R^2h$, $V_2=\pi r^2h$,

所以

$$V=V_1-V_2=\pi R^2h-\pi r^2h$$
$$=\pi h(R^2-r^2)=\pi h(R+r)(R-r).$$

因大圆的半径 R 减去小圆的半径 r 是管壁厚，即

$$R-r=b,$$

又

$$R+r=OB+OA=AB$$
$$=CB-CA=d-b,$$

将 $R-r=b$, $R+r=d-b$ 代入 V 的表达式得

$$V=\pi hb(d-b).$$

三、配　方　法

在完全平方公式 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ 中，我们看出，二次项 x^2 的系数是 1，常数项 a^2 正好是一次项 x 的系数 $2a$ 的一半的平方，因此可以利用完全平方公式来解决二次三项式的分解因式.

[例 8]　分解因式 x^2+6x+8.

解：x^2+6x+8 的二次项系数是 1，一次项系数是 6，如果加上 6 的一半的平方，即 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ 这一常数，就可以成为完全平方形式．但加上 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ 后还必须减去 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$，这样才能使原式不变，所以

$$x^2+6x+8=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+8$$
$$=x^2+6x+3^2-9+8$$
$$=(x^2+2\cdot3x+3^2)-1=(x+3)^2-1^2$$
$$=(x+3+1)(x+3-1)=(x+4)(x+2).$$

象这样，对一个二次三项式配出一个一次二项式的完全平方的方法，叫配方法。

[例 9] 在下列括号内填上适当式子，以配成完全平方：

(1) $x^2+4x+(\quad)$；

(2) $x^2-(\quad)+9$.

解：(1) 要配成完全平方，必须使常数项是一次项系数的一半的平方，现在 x 的系数为 4，所以，括号内的常数项应填上 2^2，即

$$x^2+4x+(2)^2=(x+2)^2;$$

(2) 在括号内填上 $2\cdot 3x$，此多项式就可配成完全平方，即

$$x^2-(2\cdot 3)x+3^2=x^2-6x+9=(x-3)^2,$$

如果括号内填上 $-6x$，也可把原式配成完全平方，即

$$x^2-(-6x)+3^2=x^2+6x+3^2=(x+3)^2.$$

[例 10] 用配方法分解因式 $2x^2+5x+3$.

解：这里的二次项系数是 2，不能直接用上述方法分解。但是，如果把系数 2 提出来，化成二次项系数为 1 的形式，就可运用配方法了.

$$\begin{aligned}2x^2+5x+3&=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)\\&=2\left[x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right]\\&=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\\&=2\left(x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\\&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)=(2x+3)(x+1).\end{aligned}$$

[例 11]　分解因式：

(1) x^2-2x-4;　　　　　　(2) $3x^2-9x+5$.

解：(1) $x^2-2x-4=x^2-2x+1^2-1^2-4$

$$=(x^2-2x+1)-5$$
$$=(x-1)^2-(\sqrt{5})^2$$
$$=(x-1+\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5});$$

(2) $3x^2-9x+5=3\left(x^2-3x+\frac{5}{3}\right)$

$$=3\left[x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{3}\right]$$
$$=3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{12}\right]$$
$$=3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2\right]$$
$$=3\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{6}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{6}\right)$$
$$=3\left(x-\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)\left(x-\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right).$$

前面我们介绍了分解因式的配方法，对某些系数较简单的二次三项式，用十字相乘法分解因式比较方便.

例如 $(x-4)(x+1)=x^2-3x-4$，反过来，有

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1),$$

得知一个二次三项式的分解式是两个一次式.

如将 $x^2-7x+10$ 分解因式，可设

$$x^2-7x+10=(x+a)(x+b).$$

怎样确定 a、b 之值呢？展开上式右边，得

$$x^2-7x+10=x^2+(a+b)x+ab,$$

对比等式两边，只要使 a、b 的选择，能满足下列关系即可：

$$a+b=-7, \quad ab=10.$$

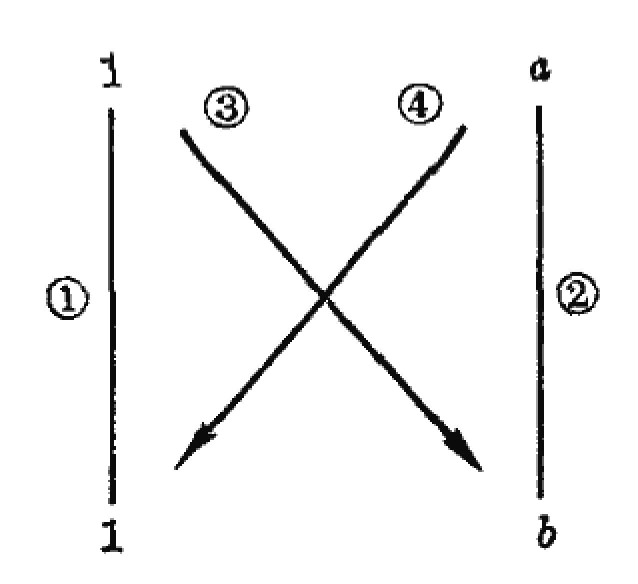


图 2-6

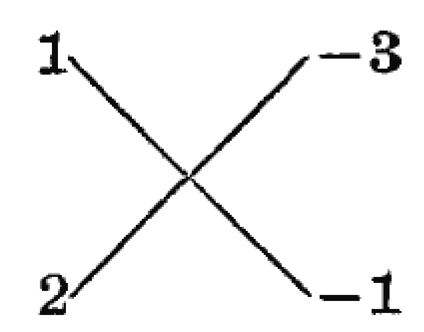
根据这样分析，把待求的二个系数，写成图 2-6 中的四角形式，它要满足下列要求：

(1) 两直列①、②中两数乘积依次为二次项系数 1 和常数项 10.

(2) ③、④所示的交叉两数乘积之和，为一次项系数 -7. 可以看出，当 $a=-2$，$b=-5$ 时，则 $1\cdot(-2)+1\cdot(-5)=-7$，$(-2)(-5)=10$，因此

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5).$$

又如，对于 $2x^2-7x+3$ 也可用此法分解因式，其四角形式为



这里 $1\times 2=2$ 是二次项系数，$(-1)(-3)=3$ 是常数项，$1(-1)+2(-3)=-7$ 是一次项系数，所以

$$2x^2-7x+3=(x-3)(2x-1).$$

此法可概括为一句话，叫做"看两头，凑中间"．"看两头"就是根据二次三项式两头的二个数(二次项系数和常数项)写出四角形式，"凑中间"就是看交叉乘积之和是否等于一次项的系数，以检验它是否符合要求.

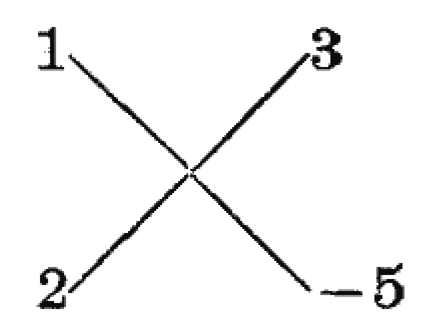
[例 12] 分解因式：

(1) x^2-5x+6; (2) $2x^2+xy-15y^2$;

(3) $3x^2+3\sqrt{3}x+2$.

解：(1) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$；

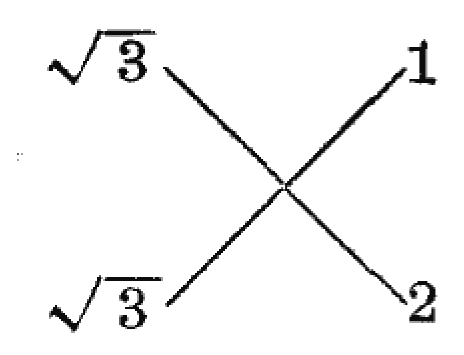
(2) 把 2 拆成 1×2，-15 拆成 $3\times(-5)$，于是得四角形式



由于交叉乘积之和为 $1\times(-5)+3\times 2=1$，正好是原式中间项系数，所以

$$2x^2+xy-15y^2=(x+3y)(2x-5y)；$$

(3) 因为



的交叉乘积之和为 $\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，所以

$$3x^2+3\sqrt{3}x+2=(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x+2).$$

在分解因式时，要抓住矛盾、灵活运用，具体问题要作具体分析，不要死套公式.

小　结

分解因式常用的有如下几种方法：

1. 提取公因式. 如

$$ab+ac=a(b+c)；$$

$$ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y).$$

2. 利用下列乘法公式分解因式：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

3．用配方法分解因式．先在 x^2+Bx+C 中加上一次项系数一半的平方 $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ 再减去 $\left(\frac{B}{2}\right)^2$，若能使二次三项式化为平方差形式

$$x^2+Bx+C=\left(x+\frac{B}{2}\right)^2-D^2 \qquad \left[D^2=\left(\frac{B}{2}\right)^2-C\right],$$

就可以再把它分解成

$$x^2+Bx+C=\left(x+\frac{B}{2}+D\right)\left(x+\frac{B}{2}-D\right).$$

习　　题

1． 分解因式：

(1) x^3y-2x^2y;　　(2) $a(x+y)+b(x+y)-c(-x-y)$;

(3) $(x+y)^2-(x-y)^2$;　　(4) $a^3-ab^2+a^2b-b^3$;

(5) $-\frac{1}{4}x^2+x-1$;　　(6) $4x^2+9y^2-12xy$;

(7) xy^2-y^3-x+y;　　(8) $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$;

(9) $x^4-x^3+27x-27$;　　(10) $5(a^2-b^2)-a+b$;

(11) $x^5+x^3-x^2-1$;　　(12) $9x^2-4y^2-z^2+4yz$.

2． 利用分解因式计算：

(1) $\left(5\frac{3}{4}\right)^2-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$;　　(2) $46.6\times1.8-36.6\times1.8$.

3． 分解因式：

(1) $x^2-14x+24$;　　(2) $-a^2+8ab+33b^2$;

(3) $3x^2-5x+2$;　　(4) $x^2y+xy^2-2y^3$;

(5) $(x+y)^2-2(x+y)-3$.

4． 在下列各式括号内，填上适当的式子（或数）以配成完全平方式：

(1) $x^2-4x+(\quad)$;　　(2) $4x^2+(\quad)+y^2$;

(3) $a^2y^2+(\quad)+1$;　　(4) $2x^2-9x+(\quad)$;

(5) $x^2+(a+b)x+(\quad)$;　　(6) $x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)$。

5．用配方法分解因式:

(1) x^2+4x-5;　　(2) x^2-5x-3;

(3) $4x^2-12x+5$;　　(4) $2x^2-5x+1$;

(5) $2x^2-x-5$。

6．先化简下列各式，再分解因式，并求当 $x=2$、$y=3$ 时的值。

(1) $4xy+10x-6y-15$;

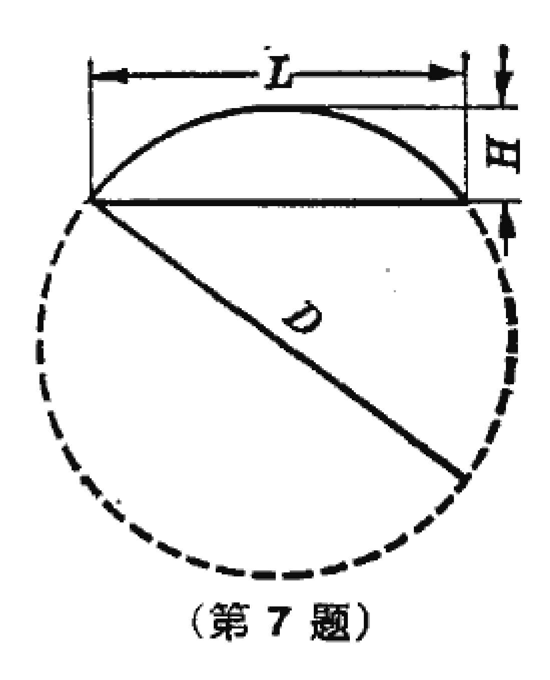
(2) $(2x-1)(2x+1)+x(2x+1)-14$。

7．弓形的高 H，弦 L 和直径 D 有以下关系:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2=\left(\frac{D}{2}-H\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2.$$

(1) 根据这个关系式，写出求直径的公式;

(2) 当 $H=3$ 厘米，$L=12$ 厘米时，求直径 D。



(第 7 题)

8．分解因式:

(1) $x^2-y^2+x^3-y^3$;　　(2) $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$;

(3) $3x^2+2\sqrt{5}x-5$。

第四节　分　　式

在第一章讲过，分数可表示为 $\frac{a}{b}$. 实际问题中常遇到这种分母包含字母的代数式，称为分式，例如

$$\frac{S}{V},\quad \frac{n+k}{m},\quad \frac{b^2}{1-a^2},\quad \frac{3x+4}{5x^2-3x+1}.$$

从上面的几个例子可看出，两个整式相除就是一个分式.

分式是分数的推广，它保留着分数的基本性质:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{A}{B},$$

即分式的分子和分母同除以不为零的代数式，分式的值不变.利用这性质，分式可以约分化简，例如

$$\frac{4x^2y}{12x^4}=\frac{4x^2\cdot y}{4x^2\cdot 3x^2}=\frac{y}{3x^2}\quad (约去\ 4x^2),$$

$$\frac{-x^3z}{-x^2y}=\frac{-x^2\cdot xz}{-x^2\cdot y}=\frac{xz}{y}\quad (约去\ -x^2),$$

$$\frac{a^2-9ab+14b^2}{a^2-ab-2b^2}=\frac{(a-2b)(a-7b)}{(a-2b)(a+b)}=\frac{a-7b}{a+b}\quad (约去\ a-2b),$$

$$\frac{9x^2-y^2}{xy^2+9x^3-6x^2y}=\frac{9x^2-y^2}{9x^3-6x^2y+xy^2}$$

$$=\frac{(3x+y)(3x-y)}{x(3x-y)^2}=\frac{3x+y}{x(3x-y)}\quad (约去\ 3x-y).$$

以上几例都是先行分解然后约分，达到化简分式目的.

对一个分式，当分子次数高于或等于分母次数(叫做假分式)时，有时需要把它变形，例如

$$\frac{6x^3+3x^2-3}{3x^2-4},$$

经如下除式计算:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x\ +1 \\
\cline{2-2}
3x^2-4 & 6x^3+3x^2 \qquad -3 \ \cdots\cdots 按降幂排列，缺项要空位 \\
 & 6x^3 \qquad -8x \qquad \cdots\cdots 2x\cdot(3x^2-4) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^2+8x-3 \\
 & \qquad 3x^2 \qquad -4 \ \cdots\cdots 1\cdot(3x^2-4) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 8x+1
\end{array}$$

得

$$\frac{6x^3+3x^2-3}{3x^2-4}=2x+1+\frac{8x+1}{3x^2-4}.$$

这样，这个假分式就变形为一个整式与一个分子次数低于分母次数的分式(叫做真分式)之和.

一、分式的乘除

与分数的乘除法则一样，两分式 $\frac{A}{B}$ 和 $\frac{C}{D}$ 的乘除法则为

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

[例 1]　计算：

(1) $\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a^2}$；　　(2) $\frac{x}{x^2y-y}\div\frac{x^2y}{x^3+x^2}$.

解：(1) $\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{a(a^2-1)}{(a+1)a^2}=\frac{a(a+1)(a-1)}{a(a+1)a}$

$$=\frac{a-1}{a}.$$

作分式乘法时，也可先约分后相乘，如

$$\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{a}{a+1}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{a^2}=\frac{a-1}{a}.$$

(2) $\frac{x}{x^2y-y}\div\frac{x^2y}{x^3+x^2}=\frac{x}{x^2y-y}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2y}$

$$=\frac{x}{y(x^2-1)}\cdot\frac{x^2(x+1)}{x^2y}$$

$$=\frac{x}{y(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x^2(x+1)}{x^2y}$$

$$=\frac{x}{y^2(x-1)}.$$

[例 2]　先化简下列各式，再求它们的值：

(1) $\frac{x^2+2x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$，　　其中 $x=\sqrt{3}$；

(2) $\frac{a}{3a-6}\div\frac{a-2}{a^3-2a^2-4a+8}$， 其中 $a=4$.

解：(1) $\frac{x^2+2x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=x+1,$$

将 $x=\sqrt{3}$ 代入，得到原式的值是

$$\sqrt{3}+1=1.732+1=2.732.$$

(2) $\frac{a}{3a-6}\div\frac{a-2}{a^3-2a^2-4a+8}$

$$=\frac{a}{3a-6}\cdot\frac{a^3-2a^2-4a+8}{a-2}$$

$$=\frac{a}{3(a-2)}\cdot\frac{a^2(a-2)-4(a-2)}{a-2}$$

$$=\frac{a}{3(a-2)}\cdot\frac{(a-2)(a^2-4)}{a-2}$$

$$=\frac{a(a+2)(a-2)}{3(a-2)}=\frac{a(a+2)}{3},$$

将 $a=4$ 代入，得到原式的值是

$$\frac{4}{3}(4+2)=8.$$

[例 3] 计算：

(1) $\dfrac{\frac{7ax}{2bc}}{\frac{21ac}{4b}}$；　　　　(2) $\dfrac{\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x+9}}{\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x}}$.

解：(1) $\dfrac{\frac{7ax}{2bc}}{\frac{21ac}{4b}}=\frac{7ax}{2bc}\cdot\frac{4b}{21ac}=\frac{2x}{3c^2}$；

(2) $$\frac{\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x+9}}{\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x}}=\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-4x-5}$$

$$=\frac{(x-5)(x+3)}{(x+3)^2}\cdot\frac{x(x+3)}{(x+1)(x-5)}$$

$$=\frac{x}{x+1}.$$

二、分式的加减

与分数一样，同分母分式相加减是分母不变，分子相加减：

$$\frac{A}{M}\pm\frac{B}{M}=\frac{A\pm B}{M}.$$

［例 4］ 计算：

(1) $\frac{3a+5b}{4a^2b}+\frac{2a-3b}{4a^2b}$； (2) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}-\frac{2x+y}{x^2-y^2}$；

(3) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{y+2x}{y-x}$.

解：(1) $$\frac{3a+5b}{4a^2b}+\frac{2a-3b}{4a^2b}=\frac{3a+5b+2a-3b}{4a^2b}$$

$$=\frac{5a+2b}{4a^2b};$$

(2) $$\frac{4x-y}{x^2-y^2}-\frac{2x+y}{x^2-y^2}=\frac{4x-y-(2x+y)}{x^2-y^2}=\frac{2x-2y}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{2}{x+y};$$

(3) 这里两分式分母不完全相同，但 $y-x$ 可写成 $[-(x-y)]$，所以

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{y+2x}{y-x}=\frac{x+y}{x-y}-\frac{y+2x}{x-y}=\frac{x+y-y-2x}{x-y}$$

$$=\frac{-x}{x-y}=\frac{x}{y-x}.$$

异分母的分式作加减运算，必须先通分，使之化为同分母的分式，然后再加减．例如

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{CB}{BD}=\frac{AD+CB}{BD}.$$

[例5] 计算：(1) $\frac{b}{4a^2}+\frac{3}{2ab^3}$；

(2) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{y}{x^2+2xy+y^2}$； (3) $xy-\frac{x^2y}{x+1}$.

解：(1) $\frac{b}{4a^2}$ 和 $\frac{3}{2ab^3}$ 的分母不同，公分母可取为 $4a^2\times 2ab^3=8a^3b^3$，也可取为 $4a^2b^3$，而 $4a^2b^3$ 的次数比 $8a^3b^3$ 低，系数也小，可使运算更为简单．如何求出 $4a^2b^3$ 呢？事实上，将两个分母分解因式：

$$4a^2=2^2\cdot a^2,\quad 2ab^3=2\cdot a\cdot b^3.$$

此两个分母的因式可分为三类，它们分别为 2、a、b 的幂．在每一类因式中取一个次数最高的，即 2^2、a^2、b^3，乘起来就是 $4a^2b^3$，它是 $4a^2$，$2ab^3$ 的最简公分母．因此

$$\frac{b}{4a^2}+\frac{3}{2ab^3}=\frac{b\times b^3}{4a^2b^3}+\frac{2a\times 3}{4a^2b^3}=\frac{b^4+6a}{4a^2b^3};$$

(2) 此两分式的最简公分母为 $(x+y)^2(x-y)$，所以

$$\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{y}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x}{(x+y)(x-y)}-\frac{y}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x+y)^2(x-y)}=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2(x-y)};$$

(3) $xy-\frac{x^2y}{x+1}=\frac{xy}{1}-\frac{x^2y}{x+1}=\frac{xy(x+1)}{x+1}-\frac{x^2y}{x+1}$

$$=\frac{x^2y+xy-x^2y}{x+1}=\frac{xy}{x+1}.$$

从上例看出，分母如能分解因式，要先分解，再通分，然后进行分式的加减运算。

［例 6］ 某厂计划生产 a 台机器，原定每天生产 b 台，经大搞技术革新，提高工效，每天多生产 c 台，问提前几天完成任务？

解：原定每天生产 b 台，生产 a 台就要 $\frac{a}{b}$ 天；大搞技术革新后，每天能生产 $b+c$ 台，那么生产 a 台只需 $\frac{a}{b+c}$ 天，提前了 $\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}$ 天完成任务，这里

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}=\frac{a(b+c)}{b(b+c)}-\frac{ab}{b(b+c)}$$

$$=\frac{ab+ac-ab}{b(b+c)}$$

$$=\frac{ac}{b(b+c)}.$$

［例 7］ 化简：

(1) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$;

(2) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$.

解：(1) 如直接通分再运算，较复杂，将它分组进行运算可简便些。

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right)$$

$$=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}+2\left[\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\left[\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-1)}\right]$$

$$=\frac{12}{(x^2-4)(x^2-1)};$$

(2) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}}$$

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x+1}}=1+\frac{x+1}{2x+1}$$

$$=\frac{3x+2}{2x+1}.$$

例 3 和例 7(2) 是繁分式，其中表示除法的横线有长有短，化简时按从短到长的次序进行.

［例 8］ 对于同样的距离，船在静水中往返一次的时间和在流水中往返一次的时间是否相同？

解：设船单程行驶 s 公里，船速为 v 公里/小时，水速为 u 公里/小时，那末，顺水行船速度是 $v+u$，逆水行船速度是 $v-u$，而时间＝距离÷速度，因此可知，在流水中往返一次需要的时间是

$$t_1=\frac{s}{v+u}+\frac{s}{v-u}$$

$$=\frac{s(v-u)}{(v+u)(v-u)}+\frac{s(v+u)}{(v+u)(v-u)}=\frac{2sv}{v^2-u^2}.$$

在静水中往返一次的时间为

$$t_2=\frac{2s}{v}.$$

比较 t_1 与 t_2 大小，即比较 $\frac{2sv}{v^2-u^2}$ 与 $\frac{2sv}{v^2}$ 的大小．由于 v^2 一定大于 v^2-u^2．对于同分子的两个分数，分母大的分数小、分母小的分数大，所以 $\frac{2sv}{v^2}$ 小于 $\frac{2sv}{v^2-u^2}$，即 t_1 大于 t_2．因此船在流水中往返一次时间总比静水中长些．

小　结

1．分式是分数的推广，它与分数具有同样的基本性质，遵守同样的运算规律．

2．在进行加减运算时，对于异分母的分式先通分，再加减．通分时应取最简公分母．在进行乘除运算时，应约分成最简分式．

习　题

1．下列分式在什么条件下，没有意义？

$\frac{1}{x-2}$；　$\frac{4x}{2x-3}$；　$\frac{3}{p+q}$；　$\frac{y}{\sqrt{5}x}$；　$\frac{x^2}{x^2-9}$；　$\frac{x+y}{a(x-y)^2}$；

$\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}$．

2．化简：

(1) $\frac{144a^4b^3c^{10}}{-128a^2bc^7}$；　　(2) $\frac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$；

(3) $\dfrac{x^5y^3-4x^3y^5}{x^3y^2-2x^2y^3}$;　　(4) $\dfrac{a^2-ab}{b^2+ab}\cdot\dfrac{b^2}{a}$;

(5) $\dfrac{5x^2+3x-14}{3x^2+x-10}$;　　(6) $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

3. 把下列分式变形为整式与真分式之和:

(1) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$;　　(2) $\dfrac{1+x^3+x^2}{x^2-1}$;

(3) $\dfrac{x^3+x+5}{x^2+1}$;　　(4) $\dfrac{3x^2-x+7}{x^2+2}$;

(5) $\dfrac{2x^2-3}{2x-3}$.

4. 下列各式计算是否正确,为什么?

(1) $\dfrac{-x+y}{x-y}=-1$;　　(2) $\dfrac{a-b}{b-a}=-1$;

(3) $\dfrac{a^{3n}}{a^{3m}}=\dfrac{a^n}{a^m}$;　　(4) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=1$;

(5) $\dfrac{ax+by}{mx+ny}=\dfrac{a+b}{m+n}$;　　(6) $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{x}{y}$;

(7) $\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{a-3}{a}=\dfrac{ax+3a-ax-3x}{ax}$;

(8) $\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{2c}{a+b}$.

5. 化简:

(1) $(x^3+1)\cdot\dfrac{2x}{x^2+2x+1}$;

(2) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\cdot\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\div\dfrac{x-3}{x-4}$;

(3) $\dfrac{a(x+y)(x-y)}{(x+y)^3}\cdot\dfrac{3(x+y)^2}{a(x-y)^2}$;

(4) $\left(x^2-\dfrac{1}{y^2}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{y}\right)$;　　(5) $\left(\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{y^2-x^2}{x+y}\right)^3$;

(6) $\dfrac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}\cdot\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

6. 锅炉房存煤 a 吨, 原计划 t 天用完, 为了节约用煤, 决定将所存的煤多用 c 天,每天应节约煤多少吨?

7. 化简:

(1) $\frac{x^2-1}{x}-\frac{x+2}{x}$;　　(2) $\frac{1}{9-x^2}-\frac{1}{(x+9)(x+3)}$;

(3) $\frac{1}{x^2+3x}-\frac{1}{4x^4+24x^3+36x^2}$;

(4) $\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{2x+4}$;

(5) $\frac{5}{2x^2+6x}-\frac{9-3x^2}{x^2-9}-3$;

(6) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{4}{x^2-1}-\frac{4}{(x^2-1)^2}$;

(7) $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-1\right)(1-x^2)$;

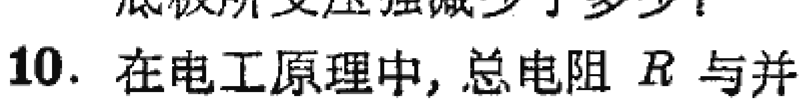
(8) $\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\left(\frac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\frac{x-y}{x}$.

8. 化简:

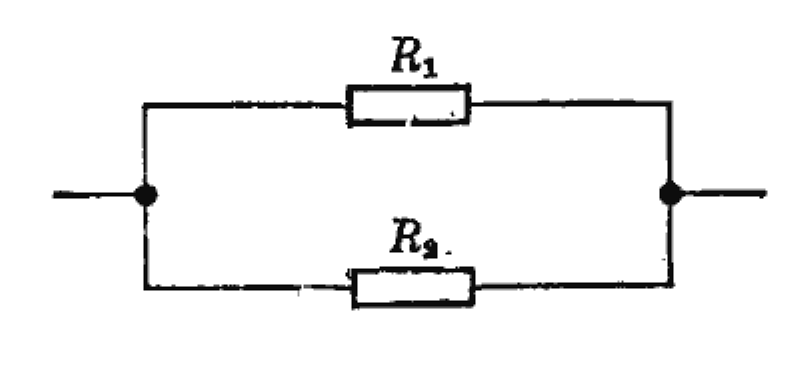
(1) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}$;　　(2) $\frac{1}{a+\frac{1}{1-\frac{a+1}{a-3}}}$;

(3) $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}$;　　(4) $\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{x+\frac{x}{x^2-1}}$.

9. 一大型货物重 G 吨，它的底面是圆形的，半径为 r 米，将它放在汽车上，车厢底板所受的压强是 $\frac{G}{\pi r^2}$ 吨/平方米 $\left(压强=\frac{压力}{面积}\right)$. 为了减少压强，使车厢底板不受损坏，工人师傅在机器下面垫一块宽 $2r$ 米，长 l 米的长方形木板（l 大于 $2r$），问这时车厢底板所受压强减少了多少?



10. 在电工原理中，总电阻 R 与并



（第 10 题）

联电阻R_1, R_2之间有关系 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，试求总电阻 R，并计算当 $R_1=50$(欧)，$R_2=100$ (欧)时，R 之值.

第五节　根　　式

一、平方根的概念

在生产实践中，我们不仅遇到乘方的运算，还常常遇到与它相反的运算.如一块正方形铁板边长是 2 米，它的面积就是 $2\times2=2^2=4$ 平方米. 反过来，知道它的面积是 4 平方米，要求它的边长，这就是求一个数 x，使得 $x^2=4$. 我们知道，$2^2=4$，$(-2)^2=4$，所以 $x=\pm2$. 因为正方形边长不能是负数，所以所求的边长为 2 米.

一般地说，对于正数 a，若有一个数的平方等于 a，我们就称它为 a 的平方根或二次方根. 并把正的平方根称为算术根，记为 $\sqrt[2]{a}$，a 叫做被开方数，2 叫根指数. 通常把 $\sqrt[2]{a}$ 简记为 $\sqrt{a}$. 例如，因为

$$2^2=4,\quad (-2)^2=4,$$

所以，2 和 -2 都是 4 的平方根，我们记 $\sqrt{4}=2$，而另一个根 -2 记作 $-\sqrt{4}$.

开方和乘方互为逆运算. 对于正数来说，开平方后再平方、或平方后再开平方，都还原为原来的数. 如

$$(\sqrt{9})^2=9,\quad \sqrt{9^2}=9.$$

一般有

$$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a\quad (a\text{ 为正数}).$$

包含开平方运算的代数式叫做平方根式. 如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{a}$、$\sqrt{x^2+y^2}$ 等.

二、平方根的性质

设 a, b 都是正数. 现在考虑$\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 的关系.

利用 $(\sqrt{a})^2=a$ 和幂的性质 $(ab)^n=a^nb^n$, 可得

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab,$$

由于 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是正数,根据算术平方根的定义, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是 ab 的算术平方根,所以

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

这就是说,两正数乘积的平方根等于这两正数的平方根的积.

再考虑 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 与 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 的关系.

根据上述同样的理由,可得

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b},$$

于是 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 是 $\frac{a}{b}$ 的算术平方根,所以

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

这就是说,两正数的商的平方根等于这两正数平方根的商.

利用平方根的这两条性质,能够化简根式和进行根式运算.

[例 1] 化简下列根式(提因子于根号外):

(1) $\sqrt{a^4b}$; (2) $\sqrt{\sqrt{16}x^2}$;

(3) $\sqrt{a^4b^2+a^2b^4}$ (a, b 同号).

解: (1) $\sqrt{a^4b}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b}$

$=\sqrt{(a^2)^2}\cdot\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}$;

(2) $\sqrt{\sqrt{16}x^2}=\sqrt{\sqrt{16}}\cdot\sqrt{x^2}$

$=\sqrt{4}x=2x$;

(3) $\sqrt{a^4b^2+a^2b^4}=\sqrt{a^2b^2(a^2+b^2)}$

$$=ab\sqrt{a^2+b^2}.$$

[例 2] 把根号外的因子放入根号内:

(1) $4\sqrt{2}$, $\quad a\sqrt{a}$;

(2) $4ab\sqrt{a+b}$, $\quad (a+b)(x-y)\sqrt{(a+b)(x-y)}$.

解: 按平方根意义: $a=(\sqrt{a^2})$, 所以

(1) $4\sqrt{2}=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{32}$,

$a\sqrt{a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^3}$;

(2) $4ab\sqrt{a+b}=\sqrt{(4ab)^2}\cdot\sqrt{a+b}$

$$=\sqrt{16a^2b^2(a+b)},$$

$(a+b)(x-y)\sqrt{(a+b)(x-y)}$

$$=\sqrt{(a+b)^2(x-y)^2}\cdot\sqrt{(a+b)(x-y)}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2(x-y)^2\cdot(a+b)(x-y)}$$

$$=\sqrt{(a+b)^3(x-y)^3}.$$

[例 3] 计算:

(1) $\dfrac{\sqrt{32xy}}{\sqrt{2x}}$; $\qquad$ (2) $\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{9y}{4x^2}}$;

解: (1) $\dfrac{\sqrt{32xy}}{\sqrt{2x}}=\sqrt{\dfrac{32xy}{2x}}$

$$=\sqrt{16y}=\sqrt{4^2\cdot y}=4\sqrt{y};$$

(2) $\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{9y}{4x^2}}=\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{9y}}{\sqrt{4x^2}}=\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{y}}{2x}=\sqrt{y}$.

在数字运算中,我们知道

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.414}\approx0.707,$$

也可以利用分数的基本性质，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414}{2}=0.707.$$

“**有比较才能鉴别。**”从上面的两种不同算法中可看到，后一种算法使分母不含有根式，计算比较简便.

对于分母中含有根式的代数式，我们常用一个适当的根式同乘它的分子、分母，把分母化为不含有根式的代数式，这种化简过程叫做分母有理化.

［例 4］ 将下列根式分母有理化：

(1) $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$；　(2) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$；　(3) $\sqrt{\frac{a(a+b)^2}{b(a-b)^3}}$.

解：(1) 要把 $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$ 的分母有理化，就要以 $\sqrt{a+b}$ 同时乘分子与分母，把分母的根号化掉，即

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}=\frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}=\frac{a\sqrt{a+b}}{(\sqrt{(a+b)})^2}$$

$$=\frac{a}{a+b}\sqrt{a+b};$$

(2) $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$；

(3) $$\sqrt{\frac{a(a+b)^2}{b(a-b)^3}}=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a}{b(a-b)}}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a(a-b)b}{b^2(a-b)^2}}$$

$$=\frac{a+b}{b(a-b)^2}\sqrt{ab(a-b)}.$$

［例 5］ 将下列各式分母有理化：

(1) $\frac{3}{2\sqrt{5}-1}$；　(2) $\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

解：(1) 根据乘法公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，只要在分子、分母同乘以 $2\sqrt{5}+1$ 就能使分母有理化，

$$\frac{3}{2\sqrt{5}-1}=\frac{3(2\sqrt{5}+1)}{(2\sqrt{5}-1)(2\sqrt{5}+1)}=\frac{3(2\sqrt{5}+1)}{(2\sqrt{5})^2-1^2}$$

$$=\frac{3}{20-1}(2\sqrt{5}+1)=\frac{3}{19}(2\sqrt{5}+1);$$

(2) $$\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}$$

$$=\frac{b}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

三、平方根式的运算

[例 6] 计算:

(1) $3\sqrt{20}+4\sqrt{5}-3\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{5}}$；

(2) $\frac{2x}{3}\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}$.

解：(1) $3\sqrt{20}+4\sqrt{5}-3\sqrt{45}-\sqrt{\frac{1}{5}}$

$$=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{5}-3\sqrt{9\times5}-\sqrt{\frac{1\times5}{5\times5}}$$

$$=3\times2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-3\times3\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{5}$$

$$=6\sqrt{5}+4\sqrt{5}-9\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{5}=\frac{4}{5}\sqrt{5};$$

上面各根式虽然根指数都是 2，而根底数并不一样，但是利用根式的性质可以把它们化成根底数相同的根式. 这种根

指数相同、根底数也相同的根式叫同类根式．例如 $3\sqrt{20}$，$4\sqrt{5}$，$3\sqrt{45}$，$\sqrt{\frac{1}{5}}$，经化简后得 $6\sqrt{5}$，$4\sqrt{5}$，$9\sqrt{5}$，$\frac{4}{5}\sqrt{5}$，它们是同类根式．和整式的加减法一样，同类根式可以合并．

(2) $\frac{2x}{3}\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x^3}}$

$$=\frac{2x}{3}\cdot 3\sqrt{x}+6x\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}-x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x}}$$

$$=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-\sqrt{x}$$

$$=(5x-1)\sqrt{x}.$$

[例 7] 计算：

(1) $\sqrt{3}(7\sqrt{6}-\sqrt{150})$；

(2) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}$.

解：(1) 利用乘法分配律和根式的性质，

$$\sqrt{3}(7\sqrt{6}-\sqrt{150})$$

$$=\sqrt{3}(7\sqrt{2\times 3}-\sqrt{2\times 3\times 5^2})$$

$$=(\sqrt{3})^2(7\sqrt{2}-5\sqrt{2})$$

$$=3(2\sqrt{2})=6\sqrt{2}；$$

(2) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}$

$$=(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{\frac{b(ab)}{a}}-\sqrt{\frac{a(ab)}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{ab}}$$

$$=ab+2b-a+1.$$

[例 8] 计算：(1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$；

(2) $(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})$；

(3) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$.

解：(1) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$

$$=3\sqrt{2}\cdot7\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot7\sqrt{2}$$
$$+3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}$$
$$=21\times2-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-10\times3$$
$$=12+\sqrt{6};$$

(2) 利用公式 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. 把 $2\sqrt{ax}$ 看作 A, $5\sqrt{by}$ 看作 B, 有

$$(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})=(2\sqrt{ax})^2-(5\sqrt{by})^2$$
$$=4ax-25by;$$

(3) 利用两数和的平方公式,

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2$$
$$=\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}.$$

[例 9] 计算：$-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}$.

解：$-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}\div\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\times5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)}{x^2}\cdot\frac{2bx^2}{a-b}}$

$$=-\frac{15}{2}\sqrt{4b}=-15\sqrt{b}.$$

[例 10] 化简：

(1) $\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}$;　　　　(2) $3+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解：(1) 当 a 大于 b 时,

$$\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}=\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}}=\frac{1}{a-b};$$

当 b 大于 a 时，

$$\sqrt{\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}=\sqrt{\frac{1}{(b-a)^2}}=\frac{1}{b-a}.$$

这里分开讨论是为了保证开方后是正数.

$$(2)\quad 3+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}=3+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$=3+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=3+\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{4x-\sqrt{x}-3}{x-1}.$$

[例 11] 为确保农业丰收，贫下中农要修筑一条横截面为等腰梯形的渠道，其底宽为 b，坡比 $=\frac{BE}{CE}=\frac{1}{m}$，设水深为 h，则被水浸湿的周长 $l=DC+2CB$ (图 2-7)，试求 l 的计算公式.

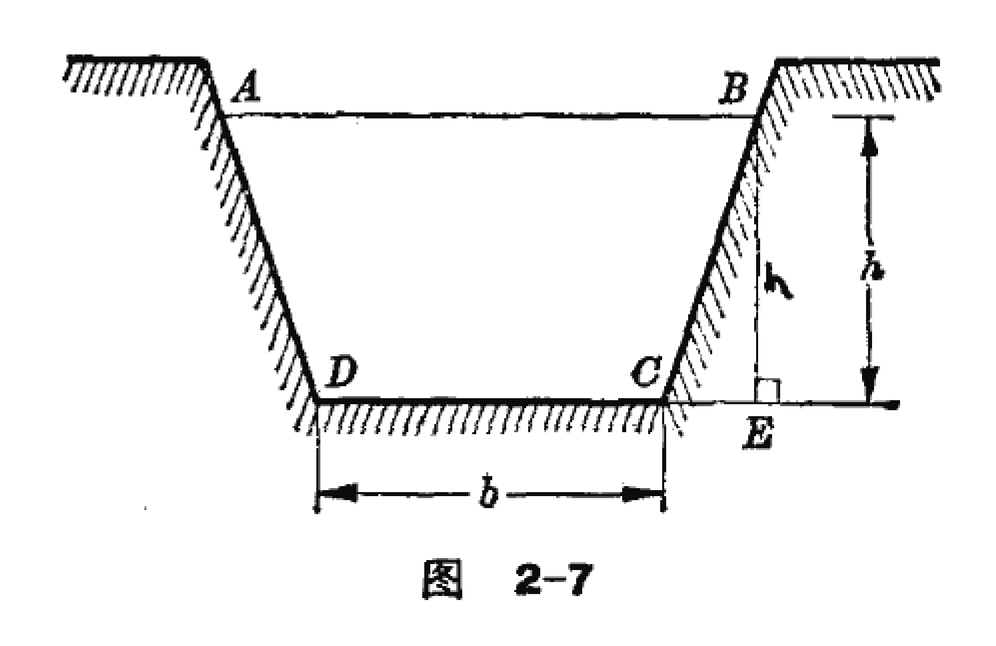


图 2-7

解：在直角三角形 CEB 中，

$$BE=h,\quad \frac{BE}{CE}=\frac{1}{m},$$

所以

$$CE=m\cdot BE=mh.$$

按勾股定理得

$$CB=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{h^2+(mh)^2}$$
$$=\sqrt{h^2(1+m^2)}=h\sqrt{1+m^2}.$$

因为

$$l=DC+2CB,$$

所以

$$l=b+2h\sqrt{1+m^2}.$$

四、*n* 次 方 根

对于正数 a，如果一个数的 n 次方等于 a，我们就称它为 a 的 n 次方根，并把正的 n 次方根（n 次算术根）记为 $\sqrt[n]{a}$（n 为正整数）.

例如，为计算 $\sqrt[3]{125}$，就要找出一个三次方等于 125 的正数，显然 $5^3=125$，于是 $\sqrt[3]{125}=5$. 再如，立方体的边长 l 与体积 V 的关系，也可用 $l=\sqrt[3]{V}$ 表出. 三次方根也简称立方根.

前面讲的平方根性质，对于 n 次方根也适用，即

$$(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{a^n})=a,$$
$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad(b\neq 0).$$

当 a 为负数时，如 n 为偶数，则根式 $\sqrt[n]{a}$ 没有意义；如 n 为奇数，则负号可以提到根号外，如

$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{2^3}=-2,\quad \sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2.$$

[例 12] 计算：

(1) $\sqrt[3]{64000}$; (2) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{200}$; (3) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27c^9d^3}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{64000}=\sqrt[3]{64\times1000}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{1000}$

$=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{10^3}=4\times10=40;$

(2) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{200}=\sqrt[3]{5\times200}=\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10;$

(3) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27c^9d^3}}=\sqrt[3]{\frac{2^3a^3(b^2)^3}{3^3(c^3)^3d^3}}=\frac{2ab^2}{3c^3d}$.

[例 13] 化简下列各式：

(1) $\sqrt[4]{16a^5}$；　　(2) $\sqrt[3]{x^3y^4(z+4)^4}$；

(3) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$.

解：(1) $\sqrt[4]{16a^5}=\sqrt[4]{2^4a^4a}=\sqrt[4]{(2a)^4}\cdot\sqrt[4]{a}=2a\sqrt[4]{a}$；

(2) $\sqrt[3]{x^3y^4(z+4)^4}=\sqrt[3]{[xy(z+4)]^3y(z+4)}$

$=\sqrt[3]{[xy(z+4)]^3}\cdot\sqrt[3]{y(z+4)}$

$=xy(z+4)\sqrt[3]{y(z+4)}$；

(3) 根据立方和公式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，把 $\sqrt[3]{x}$ 看作 a，$\sqrt[3]{y}$ 看作 b，这样

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$$
$$=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})[(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2]$$
$$=(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3=x+y.$$

[例 14] 化去分母中的根号：

(1) $\frac{xy}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b+c}}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

解：(1) $\frac{xy}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b+c}}=\frac{xy\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(b+c)^2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b+c}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(b+c)^2}}$

$=\frac{xy}{a(b+c)}(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{(b+c)^2})$；

(2) 利用公式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$，把 $\sqrt[3]{x}$ 看作 a，$\sqrt[3]{y}$ 看作 b，则

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2]}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{y})^3}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}.$$

小　结

1. 包含开方运算的代数式叫根式.

2. 根式基本性质 (a, b 为正数):

(1) $\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$;

(2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

(3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. 对根式进行化简或计算时,常用到:

(1) 根式基本性质;

(2) 合并同类根式;

(3) 分母有理化.

习　题

1. 下列计算是否正确,为什么?

(1) $\sqrt{4a^2}=4a$;　　(2) $\sqrt[3]{8}=-2$;

(3) $\sqrt{4^2\times3^2}=4\times3=12$;　　(4) $\sqrt{8}-\sqrt{3}=\sqrt{5}$;

(5) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=2\sqrt{b}$;　　(6) $\sqrt{a^2+b}=a\sqrt{b}$;

(7) $\sqrt[3]{x^3-y^3}=\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{y^3}=x-y$;

(8) $(-\sqrt{a})^2=-a$;　　(9) $\sqrt{(-2)^2}=-2$;

(10) $\sqrt{(-2)^2\times3}=2\sqrt{3}$;　　(11) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=a-b\sqrt{x}$;

(12) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

2. 化简下列各式:

(1) $\sqrt{72}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{169}{81}}$;　　(3) $\sqrt[3]{x^4y^5}$;

(4) $\sqrt{\dfrac{3b}{4c^3}}$　　(5) $\dfrac{b}{a\sqrt{a+b}}$.

3. 把下列根式化为同类根式:

(1) $\sqrt{8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$;

(2) $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $2\sqrt{\dfrac{1}{3}}$;

(3) $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt{ab^3}$, $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (a 大于 0);

(4) $x\sqrt{4a}$, $3x\sqrt{\dfrac{a}{4}}$, $x^2\sqrt{\dfrac{1}{a}}$.

4. 化简:

(1) $(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})$;　　(2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}$;

(3) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}$;

(4) $\sqrt{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}$ (x、y 同号);

(5) $\sqrt{16\times121\times144}$;

(6) $ab\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+b)}$ (a 大于 0);

(7) $3-x-\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$;　　(8) $\dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$;

(9) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}}$.

5. 化简:

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;

(2) $\dfrac{(\sqrt{3}a+\sqrt{2}b)(\sqrt{3}a-\sqrt{2}b)+b^2}{\sqrt{3}a+b}$;

(3) $a^2x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{ax^2}}$ $(a\neq0,\ x\neq0)$;

(4) $\dfrac{a}{x-\sqrt{x^2-a^2}}$;　　(5) $\sqrt{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}$ ($a\pm b$ 大于 0);

(6) $\left(x\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2\sqrt{xy}+y\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)\cdot\sqrt{xy}$ (x 大于 0).

6. 电流通过导线时，导线就会发热，热量 Q 可用公式: $Q=0.24I^2Rt$ 来表示，其中 I 表电流强度(安培)，R 表电阻(欧姆)，t 表时间(秒)，若已知 Q、R、t，问如何求 I?

7. 立方体体积为 a 米^3，求立方体的表面积. 若 $a=27$ 呢?

8. 求下列代数式的值:

(1) $\left(\dfrac{2}{x+1}\right)^2$， 其中 $x=\sqrt{3}$ (精确到 0.01);

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$， 其中 $x=3,\ y=2$ (精确到 0.01).

9. 取一根长为 200 毫米的钨丝，在天平上称得它的重量为 p 毫克，如果钨丝每立方毫米重 20 毫克，那么，钨丝的直径 d (毫米)可由

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\times200\times20=p$$

求得. 试写出计算钨丝直径 d 的公式.

10. 在 $a=4$ 时，甲和乙计算 $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值，得到不同的答案，甲的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1;$$

乙的解答是

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}$$
$$=a+a-1=2a-1=2\times4-1=7.$$

哪一个答案是正确的? 另一个解答错在什么地方?

复　习　题

1. 化简或计算下列各题:

(1) $\frac{(ab)^8}{(ab)^{8-n}}$ (n 小于 8)；　　(2) $\left(\frac{3x^3yz}{4xy^2}\right)^2$；

(3) $[(-1)^2]^3$；　　(4) $a^2\cdot a^3\div a^5$；

(5) $(0.1abc)^2(-10a^2b^3c)^2(-2.5c)$；

(6) $2a^4\left(-\frac{1}{4}a^3\right)$；

(7) $(-2x)^2\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3\left(\frac{27}{40}y^3z^2\right)^2$；

(8) $-25x^2y^3(0.4y^4)$；　　(9) $x^{n+1}y(-3xy^m)(-2xyz)$.

2. 地球上约有海水 1.37×10^{18} 立方米，其中含盐为 3.699×10^{19} 公斤. 问一立方米的海水含盐多少公斤？

3. 一吨镭完全蜕变后，放出的热量相当于3.75×10^5吨煤燃烧放出的热量. 据估计，地壳里含镭一千万吨，问这些镭完全蜕变后，放出的热量相当于多少吨煤燃烧放出的热量？

4. 当 $x=-2$，$y=3$ 时，求下列各式的值:

(1) $(y-6)(2y-2)-(y-5)(y-3)+12$；

(2) $x^2-\{y^2-[4x+(3y-2xy+27x^2)+(9xy-9y^2)]\}$；

(3) $(x^{2n}+y^{2n}+x^ny^n)(x^n-y^n)-(x^{2n}+y^{2n}-x^ny^n)(x^n+y^n)$.

5. 展开下列各式:

(1) $(a+1)(a^2-a+1)$；　　(2) $(x+y+z)(x-y-z)$；

(3) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$；

(4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)-(2x-y)^3$.

6. 证明相邻两整数的平方差是奇数.

7. 化简下列各式:

(1) $(b-a)(-a-b)(a^2+b^2)$；　　(2) $(-x^2-1)(x^2-1)-x^4$.

8. 分解因式:

(1) $x^3y^2+2x^2y-x^2y^3-2xy^2$；　　(2) $\frac{81}{16}a^4-\frac{16}{81}b^4$；

(3) $x^2-y^2+a^2-b^2+2ax+2by$；　　(4) $x^2(x^2-20)+64$；

(5) $4x^2-4x-1$；　　(6) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$；

(7) x^6-y^6；　　(8) x^6-y^{15}；

(9) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+z^2y+2xyz$；

(10) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+z^2y+3xyz$.（提示：把 $3xyz$ 分为三个 xyz.）

9．分别用十字相乘法和配方法分解下列式子：

(1) $x^2-x+0.09$;　　(2) $16x^2-31xy-2y^2$.

10．下列演算是否正确，为什么？

(1) $\dfrac{x+a}{y+a}=\dfrac{x}{y}$;　　(2) $\dfrac{x^2}{x^3}=\dfrac{0}{x}=0$;

(3) $\dfrac{-x-y}{x-y}=-1$;　　(4) $\dfrac{3(x+1)^2}{x^2+(x+1)^2}=\dfrac{3}{x^2}$;

(5) $\dfrac{a-x}{(a^2-x^2)^2}=\dfrac{1}{(a+x)^2}$.

11．计算：

(1) $\dfrac{5a}{3b^2c}-\dfrac{7b}{6ac^2}+\dfrac{11c}{9a^2b}$;　　(2) $(a+b)-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2}$;

(3) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x-2}$;　　(4) $\dfrac{x}{1-x}\div\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

(5) $\left(\dfrac{4x^2-1}{x-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3-x}{1-2x}\right)^3$;

(6) $\dfrac{x+y}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{y+z}{(z-x)(x-y)}+\dfrac{z+x}{(x-y)(y-z)}$.

12．化简：

(1) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-4x+3}$;

(2) $\dfrac{1}{x+b}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}$;

(3) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$;

(4) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-3}}$;　　(5) $\dfrac{\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2}}{-\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}}$;

(6) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$;　　(7) $\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}\right)(a^4+a^3)$.

13. 化简或计算:

(1) $2\sqrt{12}-4\sqrt{27}+3\sqrt{48}$; (2) $5\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$;

(3) $\sqrt{(1.7)^2-(0.26)^2}$; (4) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$;

(5) $\frac{5}{\sqrt{20}}$ (精确到 0.01), 已知 $\sqrt{5}\approx 2.236$;

(6) $\sqrt{27x^2-9x^3}$ (x 小于 0); (7) $\sqrt{x^2-4x+4}$ (x 小于 2);

(8) $\sqrt[3]{a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}}$.

14. 下列计算是否正确,为什么?

(1) $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$;

(3) $(2+a)\sqrt{a}=\sqrt{(4+a^2)a}$;

(4) $-2\sqrt{3}=\sqrt{(-2)^2\cdot 3}=\sqrt{12}$.

15. 化简或计算:

(1) $(\sqrt{x}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2}-1)$;

(2) $\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-b}$;

(3) $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;

(4) $1+\frac{3}{2+\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$; (5) $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$;

(6) $a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}-\frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ($a+b$ 大于 0);

(7) $(a^2-b^2)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-(a^2+b^2)\sqrt{(a+b)^3(a-b)}$ ($a+b$ 大于 0);

(8) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\times\sqrt{a-\sqrt{b}}\times\sqrt{a^2-b}$, 当 $a=3, b=2$ 时,求其值(精确到 0.01).

16. 如果 $m=\frac{70m_0}{\sqrt{\beta^2-1}}$, 当 $\beta=99$, $m_0=1$ 时, 求 m.

17. 有理化分母并化简:

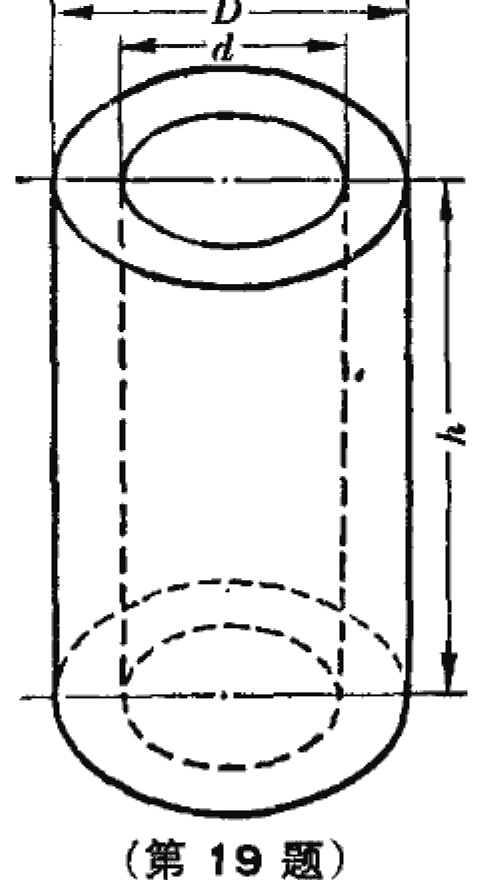
(1) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;　　　(2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$;

(3) $\dfrac{1+a^2+a\sqrt{1+a^2}}{a+\sqrt{1+a^2}}$.

18. 设 m 和 n 是两个不相等的数，指出由于下列推算的哪一步的错误，因而得出错误的结论：

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2,$$
$$(m-n)^2=(n-m)^2,$$
$$m-n=n-m, \quad \text{(两端开方)}$$
$$2m=2n, \quad \text{(移减为加)}$$
$$\therefore \quad m=n.$$

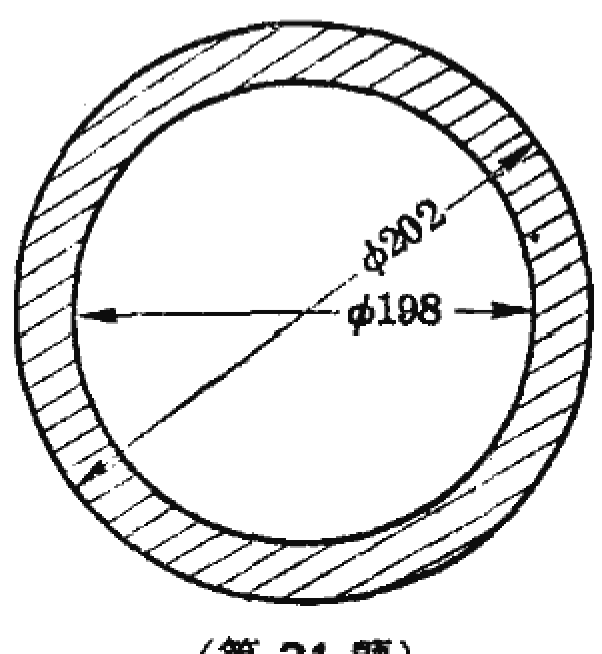
19. 中国工人自己制造的万吨水压机，粉碎了帝国主义对我国的封锁，其中四根空心钢立柱如图所示，它的高为 18 米，外径为 1 米，内径为 0.4 米，求它的重量(钢的单位体积重 7.8 吨/米^3，而物体重量 W 等于体积 V 与单位体积的重量 P 的乘积).



(第 19 题)

20. 横断面为正方形的钢管，其内壁宽为 14 厘米，壁厚为 3 厘米，钢的比重为 7.8 克/厘米^3，问每米钢管重多少？

21. 外套筒零件的横截面如图，求其面积.



(第 21 题)

22. 当 a 与 1 相比很小时(如 $a=0.01$, $0.001, \cdots$), $(1\pm a)^2$ 可取 $1\pm 2a$ 作为近似值, $(1\pm a)^3$ 可取 $1\pm 3a$ 作为近似值. 说明道理，然后用此法计算下列各题的近似值并指出误差是多少：

(1) $(1.002)^2$;　　(2) $(0.998)^2$;

(3) $(1.05)^3$;　　(4) $(0.95)^3$.

23. 两只船装运 m 吨货物，单独第一只船装运，需要 a 次运完，单独第二只船装运，比第一只船少 2 次运完，问这两只船的运载量(每次装运货物的吨数)相差多少吨？

24. 某厂原计划 n 天生产 m 件产品，由于改进技术，时间比原计划提前 t 天，且多生产 k 件产品，问这个工厂平均每天比原计划多生产产品多少？并计算 $m=1000$，$n=25$，$k=200$，$t=5$ 时的结果.

25. 从上海到武汉，水路长 1125 公里，铁路长 1534 公里．如果轮船的速度是每小时 v 公里，火车时速为轮船的三倍，问乘轮船比乘火车要多走几小时？设 $v=15$，求所列代数式的值.

26. 导线电阻 $R=\rho\dfrac{l}{S}$，l 是导线的长度（单位：米），S 是导线的横截面积（单位：毫米^2），ρ 是电阻系数（单位：欧姆·毫米^2/米）.

(1) 试把公式 $R=\rho\dfrac{l}{S}$ 变换成求 S 的公式；

(2) 已知 $l=10000$ 米，$R=10$ 欧姆，$\rho=0.0175$ 欧姆·毫米^2/米，问导线的截面积 S 应取多大？

27. 圆桶和方桶的容积、高都相等时，制作圆桶比较节省材料；如果桶的高是 h 米，容积是 V 立方米，制作圆桶比制作方桶可以节省多少材料？

28. 变压器线圈的导线直径 $d=1.13\sqrt{\dfrac{I}{J}}$（毫米），式中 I 为线圈中的电流强度（安培），J 为电流密度（安培/毫米^2），通常 $J=2.5$ 安培/毫米^2，试推导出 $d\approx0.7\sqrt{I}$.

第三章　代数方程与不等式

在第一章里已经学过简易方程．我们知道，含有未知数的等式叫做方程．例如

$$5x-3x=8, \tag{1}$$

$$x^2+2x+1=0, \tag{2}$$

$$3x+4y=2x+1 \tag{3}$$

等都是代数方程．满足方程的未知数的特定值叫做方程的解(或叫做方程的根)．例如 $x=4$ 是方程(1)的解，其它任何实数都不满足方程(1)，因此不是方程(1)的解．

在第二章中我们还遇到过另一种等式，例如

$$5x-3x=2x,$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1.$$

从形式上看，它们也都是含有未知数的等式，但它们的特点是：不论 x 取什么值，等式两边的值总是相等的．我们把这种等式，叫做恒等式，不叫做方程．

在工农业生产和科学实验中，经常需要从一些已知数量去求出另一些未知数量，对于这类实际问题，总是首先分析哪些是已知数量，哪些是未知数量，把它们间的等量关系表示为数学上的方程，这是解决问题的第一步——列方程；然后对方程进行变形，从中求出方程的解——解方程．

为了便于研究，根据方程中未知数的个数和最高次数，对方程进行分类．我们把未知数叫做方程的元；未知数的最高

次数叫做方程的次．这样，就有一元一次方程(如方程(1))，一元二次方程(如方程(2))，二元一次方程(如方程(3))等等之分．

在第一章，我们已讨论了一元一次方程的解法，例如解方程

$$\frac{2x+1}{2}-\frac{9x+5}{8}=0.$$

去分母得

$$8x+4-9x-5=0,$$

即

$$-x-1=0,$$

$$\therefore \qquad x=-1.$$

本章将进一步介绍其它类型的代数方程及其解法．

第一节 一次方程组

在许多实际问题中，未知量往往不止一个，而是有两个或两个以上，它们是互相联系着的．对于这种问题，需要用几个方程联合起来的办法去解决．

一、方程组的概念

我们先看一个简单的例子．

把 8 米长的钢条截成两段，使其中的一段比另一段长 2 米，问每段各长多少？

在这个问题中，待求的未知量有两个：截下的两段钢条的长度．设一段长为 x 米，另一段长为 y 米．那末，根据题意可以列出如下方程：

钢条截成两段总长是 8 米，“翻译”成代数等式是

$$x+y=8. \qquad (1)$$

截下的两段，一段比另一段长2米，"翻译"成代数等式是

$$x-y=2. \qquad (2)$$

方程(1)和(2)都是二元一次方程，它们是未知量 x 和 y 应该满足的两个条件．要正确地反映问题中未知量与已知量间的关系，必须对两个方程同时加以考虑．把它们并列在一起，写成

$$\begin{cases} x+y=8, & (1) \\ x-y=2. & (2) \end{cases}$$

这种含有两个未知数、由两个二元一次方程结合成的方程组，叫做二元一次方程组．

现在的问题是要求出既满足方程(1)，又满足方程(2)的 x 和 y 的值．

我们先考察方程(1)，把它变形为 $y=8-x$，这样，由每一个 x 的值，就可求出 y 的一个对应值，如

$$\begin{cases} x=7, \\ y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=6, \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2.8, \\ y=5.2, \end{cases} \quad \cdots$$

它们都是方程(1)的解．显然，任何一个二元一次方程都有无数多组解．

对于方程(2)，也有无数多组解，如

$$\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=4, \\ y=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x=6.2, \\ y=4.2, \end{cases} \quad \cdots$$

可以看出，在列出的各组 x 和 y 的值中，只有 $x=5$，$y=3$ 同时满足方程(1)和(2)，它是两个方程的公共的解．

我们把组成方程组的所有方程的公共解，叫做这个方程组的解．例如方程(1)和(2)组成的方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$$

因此，问题的解答是：截下的两段钢条长度分别是 5 米和 3 米.

上面提出了方程组和方程组的解这两个概念，下面介绍解方程组(即求方程组的解)的方法.

二、方程组的解法

解二元一次方程组，主要困难在于方程组中的未知数有两个. 因此我们设法从方程组里的两个方程中，消去一个未知数，把问题转化为一元一次方程来求解. 这种方法叫做消元法. 根据消去未知数(消元)的方法不同，有代入消元法与加减消元法之分.

1. 代入消元法

[例 1] 解方程组

$$\begin{cases} x+y=8, & (1) \\ x-y=2. & (2) \end{cases}$$

解：考虑从方程组中消去未知数 x，为此我们把方程(2)变形为

$$x=2+y, \qquad (3)$$

这样就把要消去的未知数 x 表示成了另一个未知数 y 的代数式. 再在方程(1)中，将 x 用 $2+y$ 来代替，即把(3)代入(1)，得

$$(2+y)+y=8,$$

这是一个关于 y 的一次方程，至此我们把二元的问题转化为一元的问题了. 解这个方程，得

$$y=3.$$

再把 $y=3$ 代入(3)，得

$$x=5,$$

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$$

[例 2]　解方程组

$$\begin{cases} 5x+3y=2, & (1) \\ 7x+3y+20=0. & (2) \end{cases}$$

解：从(1)得

$$y=\frac{2-5x}{3}, \tag{3}$$

把(3)代入(2)，得

$$7x+3\left(\frac{2-5x}{3}\right)+20=0.$$

去括号化简得

$$2x+22=0,$$

所以

$$x=-11.$$

再把 $x=-11$ 代入(3)，得

$$y=\frac{2-5\ (-11)}{3}=\frac{57}{3}=19,$$

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=-11, \\ y=19. \end{cases}$$

从上面的例子可以看出，用代入消元法解二元一次方程组的一般步骤是：

(1) 把方程组中的一个方程变形，将一个未知数用另一个未知数的代数式来表示；

(2) 将这个代数式代入另一个方程，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

(3) 解这个一元一次方程，求得一个未知数的值；

(4) 把求得的这个未知数的值代入第一步的代数式中，求出另一个未知数的值. 得到的这两个未知数的值并列在一起，就是该方程组的解.

[例 3] 解方程组(其中 m、b 都是已知数，且 $m\neq0$)

$$\begin{cases} 3mx+2y=2b, & (1) \\ y-mx=b. & (2) \end{cases}$$

解：从(2)得

$$y=mx+b, \qquad (3)$$

把(3)代入(1)，得

$$3mx+2(mx+b)=2b,$$

即

$$5mx+2b=2b,$$

所以

$$5mx=0.$$

因为 $m\neq0$, 所以 $x=0$, 再把 $x=0$ 代入(3)，得

$$y=b.$$

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=0, \\ y=b. \end{cases}$$

2. 加减消元法

我们知道，对于两个等式 $A=B$ 和 $C=D$, 可以有 $A\pm C=B\pm D$, 即在一个等式的两边同时加上(或减去)一个相等的代数式，等式仍然成立. 加减消元法就是依据这个道理，以达到消去一个未知数的目的.

[例 4] 解方程组

$$\begin{cases} 5x+3y=2, & (1) \\ 7x+3y=-20. & (2) \end{cases}$$

解：在例 2 中我们已用代入消元法解了这个方程组，现在再用加减消元法解这个方程组.

方程(1)和(2)中 y 的系数相等，如果将这两个方程两边分别相减，就可消去未知数 y，即

(2)－(1)：　$(7x+3y)-(5x+3y)=-20-2,$

从而得到一个关于 x 的一次方程

$$2x=-22,$$

解出一个未知量

$$x=-11.$$

再把 $x=-11$ 代入方程(1)或(2)中，得

$$y=19.$$

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=-11, \\ y=19 \end{cases}$$

[例 5]　用加减消元法解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{4}{3}, & (1) \\ 5(x-9)=6(y-2). & (2) \end{cases}$$

解：先化简方程组．方程(1)两边各乘以 12，得

$$3x+4y=16. \qquad (3)$$

方程(2)去括号，整理得

$$5x-6y=33. \qquad (4)$$

这里直接把(3)、(4)两个方程的两边相加或相减，不能达到消去一个未知数的目的．必须先把方程变形，使两个方程中某一个未知数的系数的绝对值相等．如考虑消去 y，则要使两方程中 y 的系数的绝对值相等．为此，在方程(3)两边都乘以 3，即(3)×3，得

$$9x+12y=48. \tag{5}$$

在方程(4)两边都乘以 2，即(4)×2，得

$$10x-12y=66. \tag{6}$$

再把方程(5)、(6)两边分别相加，即(5)+(6)，得

$$19x=114,$$

所以

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入(3)，得

$$y=-\frac{1}{2}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=6, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

从上面的例子可以看到，加减消元法就是把方程组的一个或两个方程的两边同乘以适当的数，使变形后的两个方程中，某一个未知数系数的绝对值相等，这样就可将两个方程的两边分别相加或相减，来消去一个未知数.

[例 6] 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=12, & (1) \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=17. & (2) \end{cases}$$

解：如果把 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$ 看作两个新的未知数，即设 $\frac{1}{x}=u$，$\frac{1}{y}=v$，原方程组就化为

$$\begin{cases} 2u+3v=12, & (3) \\ 3u+4v=17. & (4) \end{cases}$$

这仍是一个二元一次方程组. 求出 u 和 v 的值后，再求 x 和

y 的值就容易了.

解(3)、(4)组成的方程组，得

$$\begin{cases} u=3, \\ v=2. \end{cases}$$

由 $\frac{1}{x}=u$ 和 $\frac{1}{y}=v$, 得 $x=\frac{1}{u}$ 和 $y=\frac{1}{v}$, 于是把 $u=3$, $v=2$ 代入，得原方程组的解为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

请读者自己把求得的解代入原方程组进行验证.

代入消元法和加减消元法，它们的实质都是一样的，即通过消去一个未知数，使二元一次方程组转化为一元一次方程来求解，两者只是消元的方法不同. 因此，解二元一次方程组时，究竟用哪种方法比较简便，就要对于具体情况作具体的分析，加以灵活运用.

对于三元一次方程组，我们也可类似处理，即要抓住“消元”这个关键.

[例 7] 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+2y-z=3, & (1) \\ 2x+3y+z=12, & (2) \\ x+y+2z=11. & (3) \end{cases}$$

解：先考虑消去 z. 从(1)和(2)中消去 z：

(1)＋(2)： $5x+5y=15$, (4)

再从(1)和(3)中消去 z：

(1)×2＋(3)： $7x+5y=17$. (5)

(4)和(5)组成一个关于 x, y 的二元一次方程组，解这个

方程组，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

把它们代入(3)，得

$$z=4.$$

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=4. \end{cases}$$

在上面这个例子里，我们是从方程(1)、(2)和方程(1)、(3)中（也可在方程(2)、(3)中）消去同一个未知数 z，得到了一个关于 x 和 y 的二元一次方程组，从而把解三元一次方程组的问题转化为解二元一次方程组的问题.

［例 8］ 解方程组

$$\begin{cases} x+y=2, & (1) \\ y+z=5, & (2) \\ z+x=1. & (3) \end{cases}$$

解：(1)＋(2)＋(3)：

$$2(x+y+z)=8,$$

即 $$x+y+z=4, \quad (4)$$

(4)－(1)： $z=2$，

(4)－(2)： $x=-1$（或把 $z=2$ 代入(3)），

(4)－(3)： $y=3$（或把 $z=2$ 代入(2)）.

所以该方程组的解是

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=3, \\ z=2. \end{cases}$$

3. 行列式法

前面我们介绍了用代入消元法和加减消元法来解一次方程组，在这一实践过程中，我们注意到，这些方程组的解都是由各未知数的系数和常数项经过四则运算得到的．因此我们很自然地会提出这样的问题，能否得到一种公式，它直接把方程组的解用各未知数的系数和常数项表达出来．

为此，我们考察二元一次方程组

$$
\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}
$$

如果用加减消元法求解，在(1)式两边乘以 b_2，(2)式两边乘以 b_1，然后两式相减，便可消去 y 而得

$$
(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{3}
$$

用同样的方法消去 x，得

$$
(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{4}
$$

设 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，便可得

$$
\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, & (5)\\[2ex] y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. & (6)\end{cases}
$$

我们看到，这组解的分母是方程组中 x 和 y 的系数经过乘法和减法得来的，而分子则分别是 y 和 x 的系数与常数项经过乘法和减法得来的．为了便于记忆，我们引进一个新的记号来表示它们．

设有四个数 a_1，a_2，b_1，b_2，把它排成两行（横排叫行）两列（纵排叫列）的式如下：

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},
$$

我们规定这个式代表数 $a_1b_2-a_2b_1$，也就是位于左上角与右下角的两个数的积减去位于左下角和右上角的两个数的积，称它为一个二阶行列式．即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

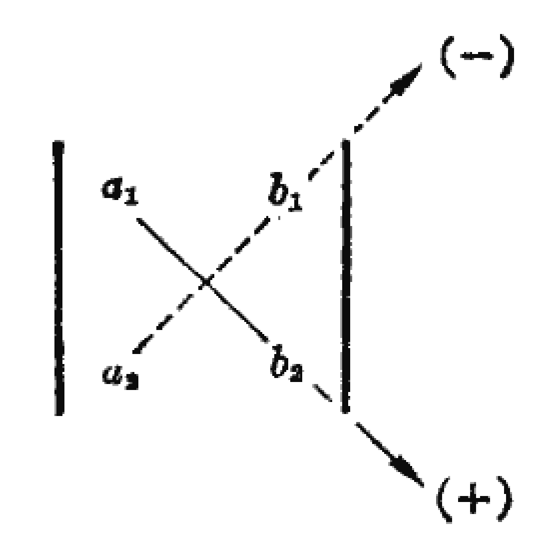
其中 a_1，a_2，b_1，b_2 称为这个行列式的元素．

例如

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=6\times5-3\times2=24,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}=2\times7-(-5)(-3)=-1.$$

$a_1b_2-a_2b_1$ 称为行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 的展开式，它可用如下对角线法则来记忆



有了二阶行列式，(5)式可表作

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (7)$$

(6)式可表作

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

为了简便起见，用 D 表示(7)、(8)式中的分母行列式，并用 D_x 表示(7)式中的分子行列式，用 D_y 表示(8)式中的分子行列式，于是方程组(I)当 $D\neq 0$ 时的解就可以表示为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases} \tag{9}$$

我们注意到，行列式 D 是由方程组(I)中 x 和 y 的系数组成的，至于 D_x 和 D_y，它们是用常数项 c_1、c_2 分别代换行列式 D 中第一、二列的元素（即方程组(I)中 x、y 的系数）而得到的.

［例 9］ 利用行列式解方程组：

$$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ -5x+7y=-1. \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-(-5)\times 2=31,$

$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}=1\times 7-(-1)\times 2=9,$

$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=3\times(-1)-(-5)\times 1=2,$

所以，

$$\begin{cases} x=\dfrac{9}{31}, \\ y=\dfrac{2}{31}. \end{cases}$$

现在，我们来讨论方程组(I)的行列式 D 等于零的情形. 如果

(1) D_x 和 D_y 中至少有一个不等于 0，则 (3) 式和 (4) 式可写为 $D\cdot x=D_x$，$D\cdot y=D_y$，无论 x 和 y 取什么数值总不可能使这两个等式同时成立. 因此方程组(I)是没有解的.

(2) $D_x=D_y=D=0$，即

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad c_1b_2-c_2b_1=0,\quad a_1c_2-a_2c_1=0,$$

从而

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

这表明方程组(I)中的一个方程可由另一个方程两边乘以适当的常数而得到. 这时方程组(I)实际上只包含一个方程，因此它有无限多组解.

[例 10] 解方程组

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x+4y=3. \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$

因此方程组无解. 事实上，第一个方程两边乘以 2 后得

$$2x+4y=2,$$

与第二个方程矛盾.

[例 11] 解方程组

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ 4x-2y=6. \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=0,$

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0,$

因此方程组有无限多组解. 事实上，第一个方程两边乘以 2 便得到第二个方程. 即这个方程组实际上只包含一个方程

$$2x-y=3.$$

取 x 为任意值而使 $y=2x-3$，便得到方程组的无限多组解.

综合上述讨论可得如下结论:

对于二元线性方程组

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

则

(1) 当 $D\neq 0$ 时，方程组(I)有唯一确定的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases}$$

(2) 当 $D=0$ 而 D_x 和 D_y 中至少有一个不等于 0 时，方程组(I)无解.

(3) 当 $D=D_x=D_y=0$ 时，方程组(I)有无限多组解.

用二阶行列式表达二元一次方程组的解的方法，可以推广到三元一次方程组. 在推广之前，我们先列举几个即将用到的二阶行列式的性质:

(1) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

证明: $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=b_1a_2-b_2a_1=-(a_1b_2-a_2b_1)=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

同样，也可证明

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

即

对调行列式的两行(或两列)，行列式符号改变，但绝对值不变.

(2) $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$

即

行列式的某一行(或某一列)如果有公因子，这公因子可以提到行列式记号的外面去.

(由读者自证).

(3) $\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 \\ a_2'' & b_2 \end{vmatrix}.$

(由读者自证).

现在研究三元一次方程组

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. & (3) \end{cases}$$

为了求这个方程组的解，我们先由(2)、(3)联立，分别解出用 x 表示的 y、z，然后代入(1)式，以达到消去 y、z 的目的.

由(2)、(3)得

$$\begin{cases} b_2y+c_2z=d_2-a_2x, \\ b_3y+c_3z=d_3-a_3x. \end{cases}$$

设 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$，便可解得用 x 表示的 y、z 为

$$y=\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2x & c_2 \\ d_3-a_3x & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2x \\ b_3 & d_3-a_3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

代入(1)得

$$a_1x+b_1\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2x & c_2 \\ d_3-a_3x & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}+c_1\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2x \\ b_3 & d_3-a_3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=d_1.$$

两边乘以$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，并利用二阶行列式的性质(2)、(3)可得

$$\begin{aligned} a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}x+b_1\left(\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}x\right) \\ +c_1\left(\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}x\right) \\ =d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

再利用性质(1)加以整理可得

$$\begin{aligned} \left(a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)x \\ =d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \qquad (4)$$

由此立即可解出 x.

为了方便起见，我们引入由九个数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 排成的三行三列的式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

用它来表示(4)式中 x 前面的系数，称这个式为三阶行列式. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 称为这个行列式的元素. 根据这个定义，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

这样，(4)式便可用三阶行列式表作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

和用二阶行列式表达二元一次方程组的解相类似，我们用 D 表示上面三式中左端的行列式，用 D_x、D_y、D_z 分别表示各式右端的行列式，于是方程组(II)当 $D\neq0$ 时的解可以写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}. \end{cases}$$

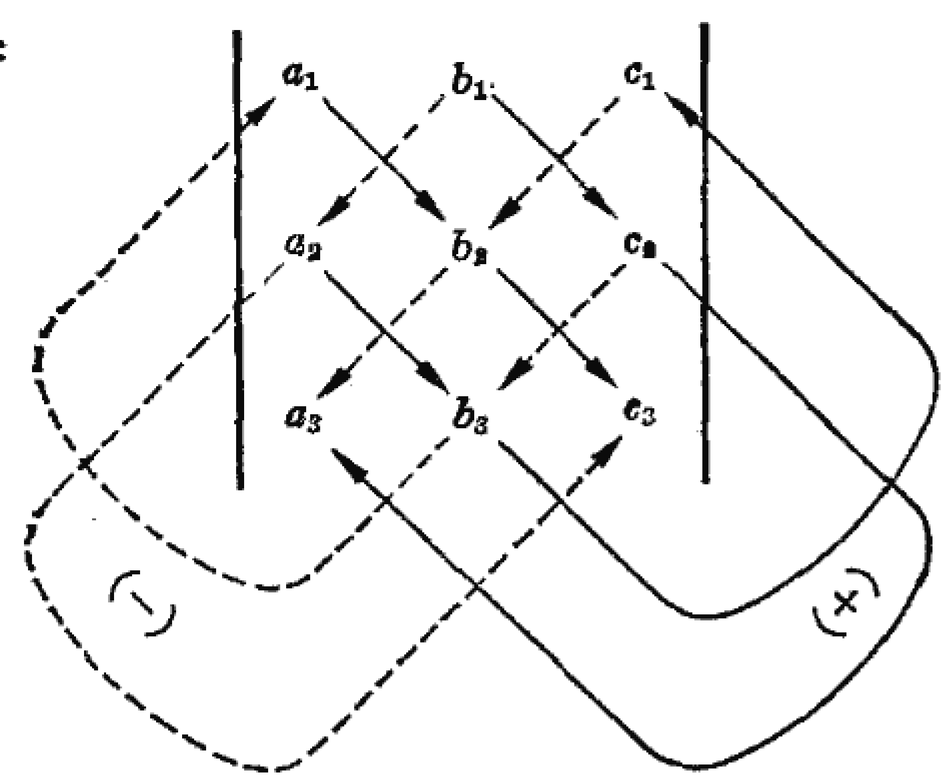
其中 D_x, D_y, D_z 是用方程组(II)的常数项 d_1, d_2, d_3 分别代换 D 中第一、二、三列的元素[即方程组(II)中 x, y, z 的系数]而得到的。

这样，求三元一次方程组的解就归结为三阶行列式的计算了.

把等式(5)右边的各个二阶行列式展开，可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

等号右边的式子称为三阶行列式的展开式，它可用下图所示规则来记忆：



就是说，每条线上的三个数相乘，实线上三个数的乘积取正号，虚线上三个数的乘积取负号.

上述这个法则叫做三阶行列式的对角线法则．记住这个法则便可迅速算出三阶行列式的值.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times5\times2 + 1\times(-2)\times3 + (-1)\times6\times4$$
$$-3\times5\times4 - (-1)\times1\times2 - 6\times(-2)\times2$$
$$= 20 - 6 - 24 - 60 + 2 + 24 = -44.$$

[例 12] 利用行列式解方程组：

$$\begin{cases} 2x+y-z=1, \\ 7x \quad +3z=5, \\ -x+2y+z=-1. \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-14-3-7-12=-36,$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-10-3-5-6=-24,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=10+7-3-5-7+6=8,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=14-5+7-20=-4.$$

所以

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-24}{-36}=\frac{2}{3},$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{8}{-36}=-\frac{2}{9},$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-4}{-36}=\frac{1}{9}.$$

和二元一次方程组的情形类似，如果三元一次方程组(II)的行列式 $D=0$，那么

(1) 如 D_x, D_y, D_z 中至少有一个不等于 0，则方程组(II)无解.

(2) 如 $D_x=D_y=D_z=D=0$，则方程组(II)可能无解，也可能有无限多组解．这两方面的例子都可以找到．

[例 13] 解方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2, \\ x+y+z=3. \end{cases}$$

关于这方程组，$D=D_x=D_y=D_z=0$，但这方程组中的三个方程是彼此矛盾的，因而无解．

[例 14] 解方程组：

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=1, \\ 2x+2y+2z=2, \\ 3x+3y+3z=3. \end{cases}$$

关于这方程组，也有 $D=D_x=D_y=D_z=0$，但这方程组中的第二和第三个方程是由第一个方程分别乘以 2 和 3 而得到的，因此这方程组实际上只有一个方程，就是

$$x+y+z=1.$$

取 x，y 为任意值，而使 $z=1-x-y$，便得到方程组的无限多组解．

三、一次方程组应用举例

[例 15] 一个 45 人的工程队，要完成一项挖土和运土任务．每人每天能挖土 6 立方米或运土 6.4 吨（每立方米土重以 1.6 吨计算），为了合理分配劳动力，使挖出的土及时运走，应分配多少人挖土，多少人运土？

解：设分配 x 人挖土，y 人运土．

每人每天能挖土 6 立方米，那末 x 人每天挖土 $6x$ 立方米．

每人每天能运土 6.4 吨，即 $\frac{6.4}{1.6}=4$ 立方米，那末 y 人每天运土 $4y$ 立方米.

根据题意，有如下等量关系：

挖土的人和运土的人共 45 人，即

$$x+y=45. \quad (1)$$

挖出的土能及时运走，就是说挖出的土应等于运走的土，即

$$6x=4y. \quad (2)$$

因此，得到方程组

$$\begin{cases} x+y=45, & (1) \\ 6x=4y. & (2) \end{cases}$$

解这个方程组得

$$\begin{cases} x=18, \\ y=27. \end{cases}$$

所以，应分配 18 人挖土，27 人运土，才能使挖出的土及时运走.

[例 16] 铜、锌、锡三种元素构成甲、乙、丙三种不同的合金：

甲种合金中铜、锌、锡的含量分别为 40%，50%，10%；

乙种合金中铜、锌、锡的含量分别为 25%，75%，0；

丙种合金中铜、锌、锡的含量分别为 45%，35%，20%.

现需要配制一种新合金 100 公斤，其中铜、锌、锡的含量为 31.5%、63.5%、5%，问应取甲、乙、丙三种合金各多少公斤？

解：设取甲种合金 x 公斤，取乙种合金 y 公斤，取丙种合金 z 公斤。

根据题意，分析列表如下：

	x 公斤甲种合金中的含量(公斤)	y 公斤乙种合金中的含量(公斤)	z 公斤丙种合金中的含量(公斤)	100 公斤新合金中的含量(公斤)
铜	$x\times 40\%$	$y\times 25\%$	$z\times 45\%$	$100\times 31.5\%$
锌	$x\times 50\%$	$y\times 75\%$	$z\times 35\%$	$100\times 63.5\%$
锡	$x\times 10\%$	$y\cdot 0$	$z\times 20\%$	$100\times 5\%$

因为 100 公斤新合金是由 x 公斤甲种合金，y 公斤乙种合金和 z 公斤丙种合金构成的，因此，从含铜量的等量关系有

$$x\times 40\% + y\times 25\% + z\times 45\% = 100\times 31.5\%,$$

从含锌量的等量关系有

$$x\times 50\% + y\times 75\% + z\times 35\% = 100\times 63.5\%,$$

从含锡量的等量关系有

$$x\times 10\% + z\times 20\% = 100\times 5\%.$$

化简得到方程组

$$\begin{cases} 8x+5y+9z=630, & (1) \\ 10x+15y+7z=1270, & (2) \\ x+2z=50. & (3) \end{cases}$$

从(1)和(2)中消去 y,

(1)×3−(2)：　$14x+20z=620,$

即

$$7x+10z=310. \qquad (4)$$

这样，(3)和(4)组成一个关于 x、z 的一次方程组，解这个方程组，便得到

$$\begin{cases} x=30, \\ z=10. \end{cases}$$

把 $x=30$, $z=10$ 代入(1)，得

$$y=60.$$

所以，应取甲种合金 30 公斤，乙种合金 60 公斤和丙种合金 10 公斤，才能配制成所要求的 100 公斤新合金。

在高等数学中，有时需要将一个分式分成几个简单分式之和，例如

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4},$$

下面我们介绍应用方程组来确定系数 A、B 的方法。

[例 17] 把下列分式分成几个简单分式之和，求系数 A、B、C:

(1) $\frac{2x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}$;

(2) $\frac{5x+9}{x(x+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$.

解: (1) $\frac{2x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}$.

先将等式右边通分，得

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$
$$=\frac{(A+B)x+(4A-3B)}{(x-3)(x+4)},$$

即

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{(A+B)x+(4A-3B)}{(x-3)(x+4)}.$$

比较这个等式的两边，分母相等，那末分子也必须相等，即

$$2x+1=(A+B)x+(4A-3B).$$

要使等式对于任何 x 的值都成立，只有使两边 x 项的系数和常数项分别对应相等，即

$$\begin{cases}A+B=2,\\4A-3B=1.\end{cases}$$

解这个方程组得 $A=1$, $B=1$. 所以

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+4}.$$

(2) $$\frac{5x+9}{x(x+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}.$$

等式右边通分，并将分子整理成 x 的多项式

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}=\frac{A(x+3)^2+Bx(x+3)+Cx}{x(x+3)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(6A+3B+C)x+9A}{x(x+3)^2},$$

即

$$\frac{5x+9}{x(x+3)^2}=\frac{(A+B)x^2+(6A+3B+C)x+9A}{x(x+3)^2}.$$

同样，比较等式两边的分子，使 x 的二次项、一次项的系数和常数项分别对应相等，得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 6A+3B+C=5, \\ 9A=9. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $A=1$, $B=-1$, $C=2$, 所以

$$\frac{5x+9}{x(x+3)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{2}{(x+3)^2}$$

小　　结

二元一次方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

能同时满足方程组中两个方程的一组 x、y 值，叫做该方程组的解.

解方程组的方法的实质，就是消去一个未知数(消元)，把

二元的问题转化为一元的问题．解方程组的方法有消元法与行列式法．

习　　题

1．判别方程组的解：

(1) 对于方程组

$$\begin{cases} 2x-y=7, & (1) \\ x+2y=-4, & (2) \end{cases}$$

下列各组 x、y 值，哪几组是方程(1)的解，哪几组是方程(2)的解，哪几组是方程组的解？

$\begin{cases} x=1, \\ y=-5, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=-1; \end{cases}$

(2) 判别 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 是不是下列方程组的解：

$\begin{cases} 3x+4y=2, \\ 2x+y=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=1-2x, \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+4y=3, \\ y=3-2x. \end{cases}$

2．用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} y=3x, \\ 7x-2y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x, \\ 3x-4y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3u-2v=11, \\ 4u-5v=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} v=2.6+9.8t, \\ \dfrac{v}{3}-3t=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 5x-2y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \quad (a\neq b), \\ x-y=2a. \end{cases}$

3．用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-y=15; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=33, \\ 2x-y=-4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4s-15t=17, \\ 6s-25t=23; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+17=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=13, \\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=3; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} (2a-b)x-(2a+b)y=4a^2+b^2, \\ x+y=2a-b. \end{cases}$

4. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 3x-4y=16, \\ 4x+y=15; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3(x-1)=4(y-4), \\ 5(y-1)=3(x+5); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{12x-3y}{5}=3x, \\ \dfrac{12y-4x}{7}-1=2y; \end{cases}$

(5) $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}=2;$

(6) $\begin{cases} 0.75s+0.4t=-\dfrac{7}{5}, \\ \dfrac{5}{8}s+3t=5.5; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{c} \end{cases}$ (a、b、c 为已知数);

(8) $\begin{cases} mx+y=2m+1 \\ x-my=2-m \end{cases}$ (m为已知数);

(9) $\begin{cases} \dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}=\dfrac{27}{2}, \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{z}=16; \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x+2y+2z=0, \\ -x-y+z=7, \\ x=2y-8; \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 2x-7y+10=0, \\ 9y+4z-18=0, \\ 11x+8z+19=0; \end{cases}$

(12) $\begin{cases} 2x+6y+3z=6, \\ 3x+15y+7z=6, \\ 4x-9y+4z=9. \end{cases}$

5. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 7x+5y=10; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}y=1, \\ \dfrac{3}{4}x-\dfrac{y}{6}=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-3y=1, \\ 2x-6y=2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-2y+3z=1, \\ x+y+z=2, \\ 3x-y-z=-1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x+2y+z=6, \\ x-y-z=-1, \\ 5x+y-3z=3; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ z+x=3; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x-2y+2z=2, \\ -x+y-z=-1. \end{cases}$

6. 变换下列公式:

(1) $\begin{cases} P=UI, \\ U=IR, \end{cases}$ 已知 P、R, 求 I;

(2) $B=b+2mh$, $\omega=\dfrac{B+b}{2}\cdot h$, 已知 ω、m、h, 求 B;

(3) $PV_0=RT$, $PV_0=\dfrac{2}{3}NW$, 已知 T、R、N, 求 W.

7. 下列分式分成几个简单分式之和,求出系数 A、B、C:

(1) $\dfrac{x-4}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}$;

(2) $\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^3}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}$.

8. 一个车间加工机轴和轴承，一人每天平均可以加工机轴 15 个或者轴承 12 个,车间共有 90 人,问应当分配多少人加工机轴,多少人加工轴承，才能使每天生产的机轴与轴承配套(一个轴承和一个机轴配成一套)?

9. 驳船的载重量为 800 吨,载货的容积是 878 立方米，现要装运生铁和棉花两种货物，生铁每吨的体积是 0.13 立方米，棉花每吨的体积是 4 立方米，试问：棉花和生铁各装多少,驳船的载重量和载货容量才可以充分利用?

10. 某生产队的两块小麦地原来生产小麦 5730 斤,改进耕作方法以后，这两块地一共生产小麦 6240 斤. 已知第一块地的产量增加 10%，第二块地的产量增加 8%，问这两块地原来生产小麦各多少斤?

11. 某厂需浓度为 70% 的硫酸溶液 600 公斤，利用 20% 的废酸与 95% 的浓硫酸来进行配制，问两种硫酸各需多少公斤？

12. 在代数式 ax^2+bx+c 中，已知 $x=1$，$x=2$ 和 $x=3$ 时，代数式的值分别是 0，3 和 8．求代数式中系数 a、b、c 的值．

第二节　一元二次方程

我们先来分析两个例子．

[例 1]　某厂要安装一只长方体水箱，要求它的容积是 18 立方米，高是 2 米，底面是正方形．在装配之前，对用料先进行计算，然后下料．问该水箱正方形底面的边长应取多少，才符合要求？

这里未知量是水箱的正方形底面的边长，设为 x 米．因为长方体体积等于长、宽、高的乘积，于是

$$2\cdot x\cdot x=18,$$

即

$$x^2=9. \tag{1}$$

解这个方程，就可求得 x 的值．

[例 2]　上海某钢管厂工人发挥革命精神，突破重重困难，制成一批达到先进水平的异形无缝钢管，为我国电机工业作出了新贡献．钢管的横断面是长为 32 毫米、宽为 16 毫米的长方形，四周围管壁的厚度相同．如果要求当中孔的面积为 260 平方毫米（图 3-1），问管壁应取多少厚？

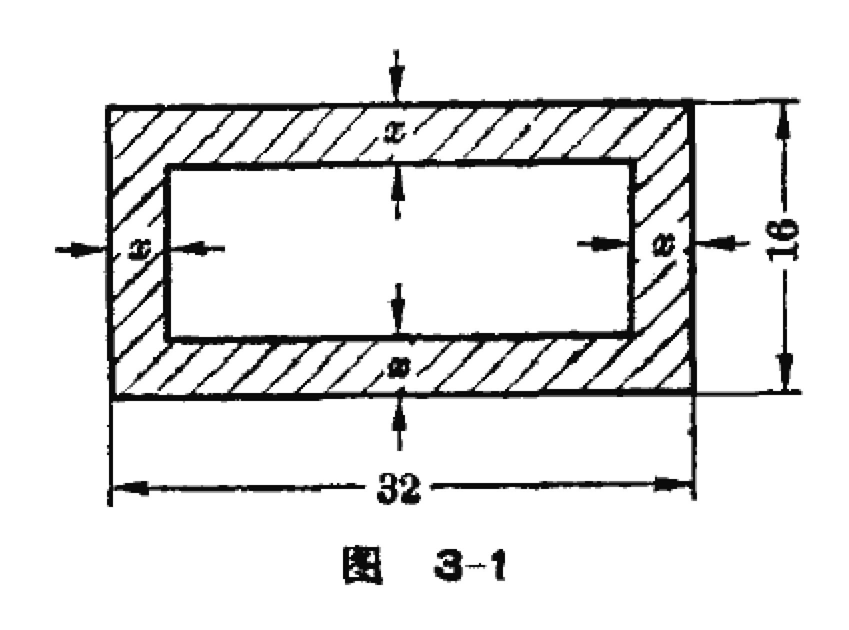


图　3-1

这里，未知量是管壁的厚度，设为 x 毫米．因为四周围管

壁厚度相同，因此，孔的长为 $32-2x$，宽为 $16-2x$，它的面积为 $(32-2x)(16-2x)$. 现已知孔的面积为 260 平方毫米，故有如下关系式：

$$(32-2x)(16-2x)=260,$$

去括号，化简得

$$x^2-24x+63=0, \tag{2}$$

解这个方程，就可求得 x 的值.

方程(1)和(2)都是只含有一个未知数，且未知数的最高次数是二次的方程，叫做一元二次方程.

任何一元二次方程，经过适当的变形后，总可以化成如下的形式：

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0),$$

这就是一元二次方程的一般形式. 方程的左边是一个关于 x 的二次三项式，ax^2 叫做二次项，a 为二次项系数；bx 叫做一次项，b 为一次项系数；c 为常数项. 一次项系数 b 和常数项 c 可以是正数、负数，也可以是零；二次项系数 a 可以是正数或负数，但不能为零(如果 $a=0$，方程变为 $bx+c=0$，就是前面讨论过的一元一次方程). 例如方程(2)，$x^2-24x+63=0$，就相当于 $a=1$，$b=-24$，$c=63$ 的情形；方程(1)，$x^2=9$，可变形为 $x^2-9=0$，这就是 $a=1$，$b=0$，$c=-9$ 的情形.

如何解一元二次方程呢？下面我们从特殊的情况着手，找出一般的一元二次方程的求解方法.

一、一元二次方程的解法

方程(1) $\qquad x^2=9$

是一元二次方程的特殊形式，容易看出满足这个方程的未知数 x 就是 9 的平方根 $+3$ 与 -3. 所以

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$$

(这里也可以理解为对 $x^2=9$ 两边开平方所得)因此原方程有两个解，分别记作 x_1 与 x_2，即

$$x_1=3,\quad x_2=-3.$$

我们也可这样来考虑．把方程(1)变形为

$$x^2-9=0,$$

左边分解因式，从而

$$(x-3)(x+3)=0,$$

这样，方程的左边是两个因式的积，而右边是零．

我们知道，如果两个因子的积等于零：$ab=0$，那末，因子 a 与 b 至少有一个等于零，即 $a=0$ 或 $b=0$；反之，如果 a 和 b 中有一个为零，$a=0$ 或 $b=0$，那末，它们的乘积一定等于零，即 $ab=0$．

因此，满足方程

$$(x-3)(x+3)=0$$

的 x 值，必定使得

$$x-3=0 \quad 或 \quad x+3=0.$$

反之，满足上述一次方程的 x 值，也一定满足原方程，于是，原方程的解为

$$x_1=3,\quad x_2=-3.$$

但从例 1 讨论的具体问题来说，x 不能取负值，因此 $x_2=-3$ 这个根并无实际意义，应把它舍去，故问题的解答是：水箱的正方形底面边长应取 3 米．

再看二次方程的另一种特殊形式

$$ax^2+bx=0.$$

将方程左边分解因式，得

$$x(ax+b)=0,$$

从而

$$x=0,\quad ax+b=0,$$

$$\therefore\quad x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

从上面两个例子可以看到，由于一元二次方程中出现了未知数的二次项，因此产生了新的矛盾，通过分解因式，可把一元二次方程转化成两个一元一次方程，从而得到一元二次方程的两个根.

毛主席教导我们："**由于特殊的事物是和普遍的事物联结的，由于每一个事物内部不但包含了矛盾的特殊性，而且包含了矛盾的普遍性，普遍性即存在于特殊性之中，……**".通过对特殊的一元二次方程的讨论，得到启发，解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的关键，就是通过把方程左边的二次三项式分解成两个一次因式，从而把二次方程的问题转化为一次方程的问题. 关于二次三项式的分解因式问题已在第二章里讨论过.

[例 3] 解方程 $x^2+5x-24=0$.

解：用十字相乘法可将方程的左边分解因式，即

$$x^2+5x-24=(x+8)(x-3),$$

因此原方程变形为

$$(x+8)(x-3)=0.$$

从而，

$$x+8=0,\quad x-3=0,$$

所以

$$x_1=-8,\quad x_2=3.$$

下面转而解例 2 的问题. 即解方程

$$x^2-24x+63=0.$$

将方程左边分解因式，得

$$(x-21)(x-3)=0,$$

于是

$$x-21=0, \quad x-3=0,$$

所以

$$x_1=21, \quad x_2=3.$$

由题意，x 表示钢管的厚度（毫米），而钢管的长和宽分别是 32 毫米和 16 毫米，因此 $x_1=21$ 毫米这个根是不合理的，应予舍去．故该问题的解答是钢管壁的厚度应为 3 毫米．

从例 1 和例 2 可以看出，由实际问题中抽象出来的代数方程，在求得了它的根以后，必须结合具体问题进行检验，把不符合实际情况的根舍去．

在第二章中我们知道，用十字相乘法分解二次三项式，有时往往是比较困难的．因此，只有当方程左边的二次三项式易于分解因式时，才用十字相乘法来解．下面我们用配方法导出一元二次方程的求解公式．

[例 4]　解方程 $x^2+x-1=0$.

解：
$$\begin{aligned} x^2+x-1 &= x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0,$$

因此方程的根为

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

下面用配方法解一般的二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad (a\neq 0).$$

化二次项系数为1，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

在方程左边加上并减去一次项系数一半的平方，即$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$$

从而化成平方差的形式

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0.$$

分解因式，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0,$$

于是

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0\quad 或\quad x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这就是一元二次方程的求解公式．对于任何形式的一元二次方程，只要先把它化成一般形式，然后把方程中各项系数代入求解公式，即可求得方程的两个解．

[例5]　解方程 $12x=4+9x^2$.

解：方程可变形为

$$9x^2-12x+4=0.$$

与一般形式比较，这里 $a=9$, $b=-12$, $c=4$．代入求解公式得

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times9\times4}}{2\times9}=\frac{12\pm0}{18},$$

所以

$$x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{2}{3}.$$

这个方程的两个根相同，都是 $\frac{2}{3}$．这种情形，我们就称该方程有重根．

[例6]　上海广大革命群众开展综合利用，修筑地下渠道，把污水穿过黄浦江底引向农村，灌溉了大片良田，图 3-2 是污水渠道的横断面，其上部是半圆形，下部是长方形，半圆最高点到渠道底的距离是 2 米，根据流量要求，设计的渠道的横断面面积是 3.88 平方米，试计算上半圆的半径．

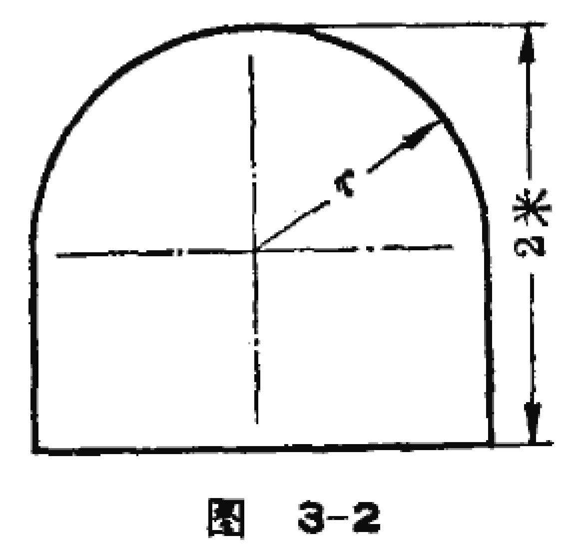


图　3-2

解：设上半圆的半径为 r 米，则上半圆面积为 $\frac{1}{2}\pi r^2$.

下部是高为 $2-r$，宽为 $2r$ 的长方形，所以面积为 $2r(2-r)$.

横断面面积是上半圆面积与下部长方形面积之和，现知横断面面积为 3.88 平方米，因此有

$$\frac{1}{2}\pi r^2+2r(2-r)=3.88.$$

整理后得

$$0.429r^2-4r+3.88=0.$$

由求解公式，得

$$r=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times(0.429)\times(3.88)}}{2\times0.429}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{9.342}}{0.858}=\frac{4\pm3.056}{0.858},$$

$$\therefore\quad r_1=\frac{4+3.056}{0.858}=8.22,\qquad r_2=\frac{4-3.056}{0.858}=1.10.$$

根据题意，$r=8.22$ 米是不可能的，应舍去．故渠道上半圆半径取 1.10 米．

[例 7] 某工地打算利用墙的一边，用长 13 米的铁丝网三面围成一个面积为 20 平方米的长方形手推车棚(图 3-3)，问车棚的长和宽应为多少？

图 3-3

解：设车棚宽为 x 米．因为铁丝网长为 13 米，所以车棚长为 $(13-2x)$ 米．

现知该车棚是面积为 20 平方米的长方形，由此可列出方程

$$x(13-2x)=20,$$

整理得

$$2x^2-13x+20=0.$$

运用求解公式，得

$$x_1=4,\quad x_2=2.5.$$

这两个解都符合题意要求，因此问题的解答是：车棚宽可取 4 米或 2.5 米．当宽为 4 米时，长为 $13-2\times4=5$ 米；当宽为

2.5 米时，长为 $13-2\times2.5=8$ 米．这两种尺寸可根据具体情况来选定．

［例 8］ 某厂为了决定一种最优的用料配方方案，本来需作大量的试验，采用“优选法”后，经几次试验就能确定最优方案，大大地节约了人力物力．“优选法”中所用常数 0.618 是这样一个问题的结果：在长为 L 的线段 AB 上求一点 C，使 $AC^2=AB\cdot BC$，如图 3-4 所示，现在我们来求 AC 的长．

A C B

图 3-4

解：已知 $AB=L$，设 $AC=x$，则 $BC=L-x$．

根据题意，$AC^2=AB\cdot BC$，于是有方程

$$x^2=L(L-x),$$

$$x^2+Lx-L^2=0.$$

应用求解公式，得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}L,\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}L.$$

因为 x 表示 AC 的长度，而 x_2 是个负值，应舍去，所以，符合题意的 AC 长度为 x_1，即

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}L=0.618L,$$

这就是“优选法”中常数 0.618 的来历．

二、一元二次方程的根的判别式

［例 9］ 解方程 $x^2+x+1=0$．

解：由求解公式，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

这里我们遇到了负数开平方的情形，在我们迄今学到的数（实数）的范围内，一切正负数的平方都是正数，负数开平方是没有意义的．所以在实数范围内，这个方程没有根．

然而正如毛主席所指出的："**在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的，自然界也总是不断发展的，永远不会停止在一个水平上。**"在数的发展过程中，人们起初认为负数开平方（如 $\sqrt{-3}$）是没有意义的，后来随着生产实践的发展，其现实意义逐渐被人们所认识，并且得到了广泛的应用．

我们用记号 i 表示 $\sqrt{-1}$，即 $i=\sqrt{-1}$，且 i 满足等式 $i^2=-1$．

如果约定把 $\sqrt{-3}$ 写成 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$ 的形式，这样，有了记号 i，所有的负数开平方就都有了新的记号，如：

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i,$$

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i.$$

于是，上面的方程的根就可写作

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2},$$

即

$$x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

这两个根都是形如 $a+bi$（a，b 为实数）的数，这种数叫做**复数**（有关复数的内容，将在第九章中讨论）．方程的这种根，叫做**复数根**．

下面讨论一元二次方程的根的几种情况．

一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

的求解公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

根据 b^2-4ac 取值的情况，方程的根有下列三种情况：

(1) 当 b^2-4ac 为正值时，方程有不相同的两个实数根(如例 4)；

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有相同的两个实数根，叫做重根(如例 5)；

(3) 当 b^2-4ac 为负值时，方程有不相同的两个复数根(如例 9).

这样，我们在解方程之前，根据 b^2-4ac 的值的情况，就可以判定方程根的情况，故 b^2-4ac 叫做一元二次方程的根的判别式.

三、可以化为二次方程的方程

前面我们讨论了一元二次方程的解法，另外有些方程，虽然形式上不是一元二次方程，但经过适当处理后，可以化为一元二次方程来求解.

[例 10] 解方程 $\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}=1$.

解：先去分母，两边同乘以 $x(x+2)$，得

$$(x+2)+3x=x(x+2),$$

整理得

$$x^2-2x-2=0.$$

代入二次方程求解公式，得

$$x_1=1+\sqrt{3},\quad x_2=1-\sqrt{3}.$$

可以验证，它们是原方程的两个根.

我们把分母中含有未知数的方程，叫做分式方程. 在以前所讨论的方程中，方程两边的代数式都是整式，我们称它们

为整式方程. 对于分式方程，可在方程的两边乘以适当的整式，从而转化为整式方程来求解.

[例 11] 解分式方程 $\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}$.

解：方程两边的公分母是 $(x+2)(x-2)$，两边同乘以 $(x+2)(x-2)$，得

$$(x-2)+4x=(x+2)(x-2)+2(x+2),$$

整理得

$$x^2-3x+2=0,$$

解之得

$$x_1=1, \quad x_2=2.$$

将 $x_1=1$ 代入原分式方程，可知 $x_1=1$ 是它的根.

将 $x_2=2$ 代入原分式方程，这时 $x-2=0$，出现分母为零的情况，故 $x_2=2$ 虽是变形后的整式方程的根，但不是原分式方程的根，这种根叫做增根，应舍去.

为什么会产生增根呢？ 我们知道，方程两边是不能同乘以零的，否则就没有意义. 我们在分式方程的两边同乘以公分母 $(x+2)(x-2)$，而变形后的整式方程恰恰有根 $x=2$，它正好使公分母 $(x+2)(x-2)=0$，因此 $x=2$ 是该分式方程的增根.

因此，用公分母同乘方程的两边，把分式方程化为整式方程来解，有时会出现不适合原分式方程的根，必须把所得的根代入原分式方程检验，把增根舍去. 也可直接代入公分母，如果公分母等于零，即为增根.

下面再来讨论一种根号内含有未知数的方程，我们把它叫做无理方程. 例如 $x=\sqrt{x+2}$，$\sqrt{x^2+25}+x=25$，$\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$，等等.

[例 12]　解无理方程 $x=\sqrt{x+2}$.

解：把方程两边平方，得

$$x^2=x+2, \tag{1}$$

即

$$x^2-x-2=0,$$

所以

$$x_1=2, \quad x_2=-1.$$

它们是不是原无理方程的根呢？

把 $x_1=2$ 代入原无理方程，可知它是该无理方程的根.

把 $x_2=-1$ 代入原无理方程，左边为 -1，右边为 1，两边不相等，所以 $x_2=-1$ 不是该无理方程的根，而是增根.

为什么无理方程也会产生增根呢？我们来比较原无理方程和方程(1).

原无理方程可写为 $x-\sqrt{x+2}=0$；而方程 $x^2-x-2=0$ 的左边可以分解为 $(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})$，即方程(1)可变形为 $(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})=0$.

这等于说，把原无理方程两边平方相当于在方程的两边同乘以因式 $(x+\sqrt{x+2})$，而求得的根 $x=-1$ 恰好使因式 $(x+\sqrt{x+2})$ 等于零，而不能使因式 $(x-\sqrt{x+2})$ 等于零，故 $x=-1$ 是增根.

因此，解无理方程时，一般来说需要把方程两边乘方相同的次数，最后把它化为整式方程来求解，还必须把所得的根代入原无理方程进行检验，舍去增根.

[例 13]　解无理方程 $\sqrt{x+10}+\sqrt{3-x}=5$.

解：两边平方，得

$$(x+10)+2\sqrt{x+10}\cdot\sqrt{3-x}+(3-x)=25,$$

整理得

$$\sqrt{x+10}\cdot\sqrt{3-x}=6,$$

两边再平方并整理得

$$x^2+7x+6=0,$$

解之得

$$x_1=-1, \quad x_2=-6.$$

经检验知它们都是原无理方程的根.

[例 14] 解方程 $x^3+2x^2-5x=0$.

解: 方程左边可以提公因式, 即

$$x(x^2+2x-5)=0,$$

这样方程左边是两个因式的乘积, 右边是零, 因此适合于

$$x=0 \quad 或 \quad x^2+2x-5=0$$

的 x 值都是原方程的根.

方程 $x^2+2x-5=0$ 的根为 $x=-1\pm\sqrt{6}$.

所以原方程的根有三个:

$$x_1=0, \quad x_2=-1+\sqrt{6}, \quad x_3=-1-\sqrt{6}.$$

[例 15] 解方程 $x^4-9x^2+18=0$.

解: 方程左边只有 x 的四次项和二次项, 没有三次项和一次项; 如果我们把 x^2 看作未知数, 把 x^2 解出来, 那末 x 的值也就得到了.

设 $y=x^2$, 代入原方程, 得

$$y^2-9y+18=0.$$

这是个关于 y 的二次方程, 解之得

$$y_1=3, \quad y_2=6.$$

因为 $y=x^2$, 由 $y_1=3$, 得 $x^2=3$, 即 $x=\pm\sqrt{3}$; 由 $y_2=6$, 得 $x^2=6$, 即 $x=\pm\sqrt{6}$.

所以原方程的根有四个:

$$x_1=\sqrt{3}, \quad x_2=-\sqrt{3}, \quad x_3=\sqrt{6}, \quad x_4=-\sqrt{6}.$$

[例 16]　解方程 $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$.

解：设 $\sqrt[3]{x}=y$，则原方程变为

$$y^2-4y+3=0.$$

所以

$$y_1=1,\quad y_2=3.$$

把 $y_1=1$ 代入 $\sqrt[3]{x}=y$，得 $x_1=1$.

把 $y_2=3$ 代入 $\sqrt[3]{x}=y$，得 $x_2=27$.

经检验知 $x_1=1$ 和 $x_2=27$ 都是原方程的根.

[例 17]　解方程组

$$\begin{cases} x+3y=3, & (1) \\ x^2+y^2=4. & (2) \end{cases}$$

解：用代入消元法解这个方程组．从(1)得

$$x=3-3y, \tag{3}$$

把(3)代入(2)得

$$(3-3y)^2+y^2=4,$$

整理得

$$10y^2-18y+5=0.$$

解这个二次方程得

$$y=\frac{9\pm\sqrt{31}}{10}.$$

把 $y_1=\frac{9+\sqrt{31}}{10}$ 代入(3)，得

$$x_1=3-3\left(\frac{9+\sqrt{31}}{10}\right)=\frac{3-3\sqrt{31}}{10}.$$

把 $y_2=\frac{9-\sqrt{31}}{10}$ 代入(3)，得

$$x_2=3-3\left(\frac{9-\sqrt{31}}{10}\right)=\frac{3+3\sqrt{31}}{10}.$$

所以该方程组有两组解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{3-3\sqrt{31}}{10}, \\ y_1=\dfrac{9+\sqrt{31}}{10}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{3+3\sqrt{31}}{10}, \\ y_2=\dfrac{9-\sqrt{31}}{10}. \end{cases}$$

[例 18] p 和 e 为已知正数 ($e<1$)，求满足下列方程组的正数 a 和 b:

$$\begin{cases} p=\dfrac{b^2}{a}, & (1) \\ e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. & (2) \end{cases}$$

解: 先消去 b. 由(1)得

$$b^2=ap. \tag{3}$$

代入(2)得

$$e=\frac{\sqrt{a^2-ap}}{a}, \tag{4}$$

即

$$ae=\sqrt{a^2-ap}.$$

这是一个只含未知数 a 的无理方程. 两边平方得

$$a^2e^2=a^2-ap,$$

即

$$a^2(1-e^2)-ap=0, \tag{5}$$

所以

$$a=\frac{p}{1-e^2}$$

($a=0$ 也是方程 (5) 的解, 但不是方程 (4) 的解, 故舍去). 把求得的 a 值代入(3), 得

$$b^2=\frac{p^2}{1-e^2},$$

所以

$$b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

(这里不取负值, 因为按题意 b 是正数).

小　　结

1．一元二次方程的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0),$$

它有两个根 x_1, x_2．在实际问题中还必须根据具体情况决定两个根的取舍．

2．解一元二次方程的关键，就是把二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式，使方程变形为

$$(x-x_1)(x-x_2)=0,$$

从而把二次方程的问题转化为一次方程的问题．

3．一元二次方程的求解公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

4．一元二次方程两个根的情况可由判别式 b^2-4ac 给出：

当 b^2-4ac 为正值时，有不相同的两个实数根；

当 b^2-4ac 为零时，有两个相同的实数根；

当 b^2-4ac 为负值时，有不相同的两个复数根．

习　　题

1．解下列各方程：

(1) $9x^2-16=0$;　　(2) $2x^2+7x=0$;

(3) $\frac{x^2}{2}=\sqrt{2}x$;　　(4) $4(x-1)^2=25$;

(5) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$．

2．解下列各方程：

(1) $x^2+3x+2=0$;　　(2) $y^2-5y+4=0$;

(3) $x^2+2x-3=0$;　　(4) $x^2-x=6$;

(5) $2x^2-x=10$;　　(6) $3x^2-10x+3=0$．

3. 用配方法解下列方程:

(1) $x^2+4x+1=0$;　　(2) $x^2-5x-3=0$;

(3) $2s^2-3s-2=0$;　　(4) $-4x=7-5x^2$;

(5) $x^2+ax=a$ （其中 a 为已知数）.

4. 利用求解公式解下列方程:

(1) $x^2+x-1=0$;　　(2) $3x^2-4x+3=0$;

(3) $3x^2+5x=12$;　　(4) $y^2-\sqrt{2}y-3=0$;

(5) $-y^2+5y=9$;　　(6) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$;

(7) $\frac{(z-1)^2}{4}=z-2$;

(8) $mx^2-(m-n)x-n=0$ （其中 m、n 为已知数，且 $m\neq0$）.

5. 解下列方程:

(1) $\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+1$;　　(2) $\frac{1}{y-1}+\frac{3}{2y-4}=1$;

(3) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ （a 为已知数，且 $a\neq0$）;

(4) $\frac{1}{1-x}-\frac{3x-x^2}{1-x^2}=2$;　　(5) $2\sqrt{x-3}=x-6$;

(6) $\sqrt{4x-3}=\frac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$;　　(7) $\sqrt[3]{x+2}=3\sqrt[3]{x-1}$;

(8) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;　　(9) $2x-3\sqrt{x}-14=0$;

(10) $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$ （a 为已知正数）;

(11) $16x^4-32x^2-9=0$;　　(12) $x^3-3x^2-5x=0$;

(13) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4.5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$ $\left(提示: 设 x+\frac{1}{x}=y\right)$;

(14) $\frac{r+2}{r+1}+\frac{r+1}{r+2}=\frac{13}{6}$ $\left(提示: 设 \frac{r+2}{r+1}=x\right)$.

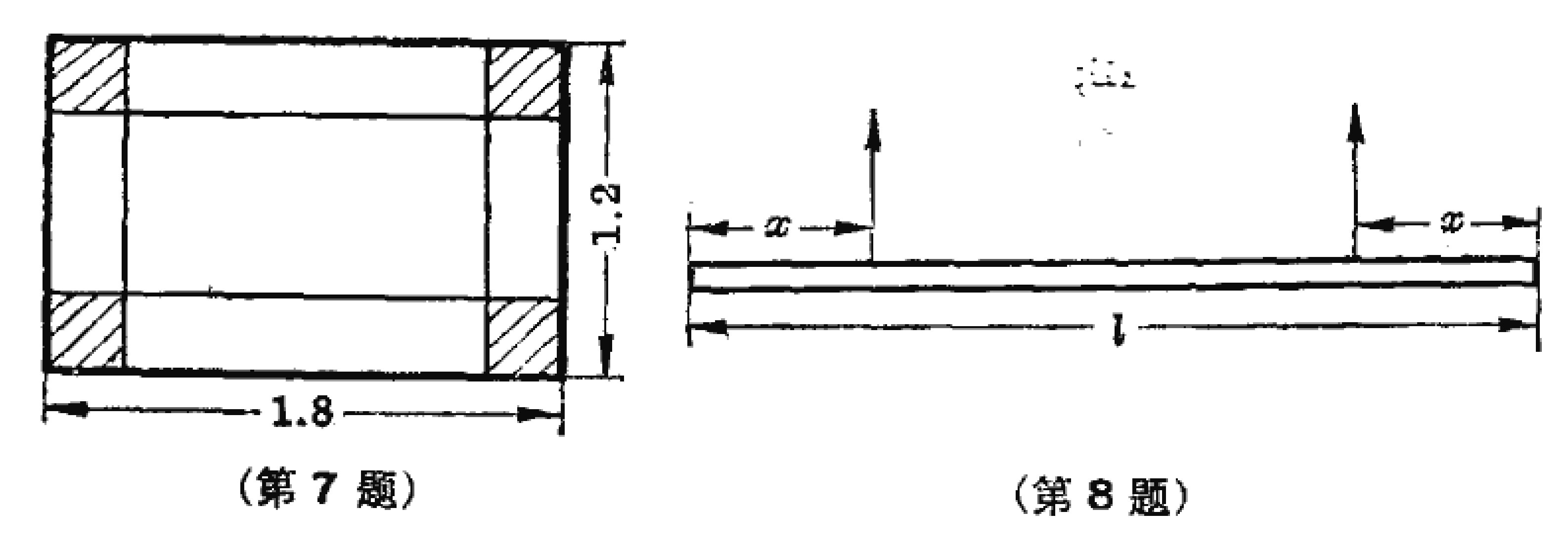
6. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=100,\\ y+2=x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=-14;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+y=5,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{5}{6},\\ \frac{1}{xy}=\frac{1}{6};\end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y=13, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{13}{6}. \end{cases}$

7. 在一块长 1.8 米，宽 1.2 米的铁皮四角截去相等的四个小正方形，以做成一个底面积为 1 平方米的无盖水箱，问截去的小正方形的边长应为多少？

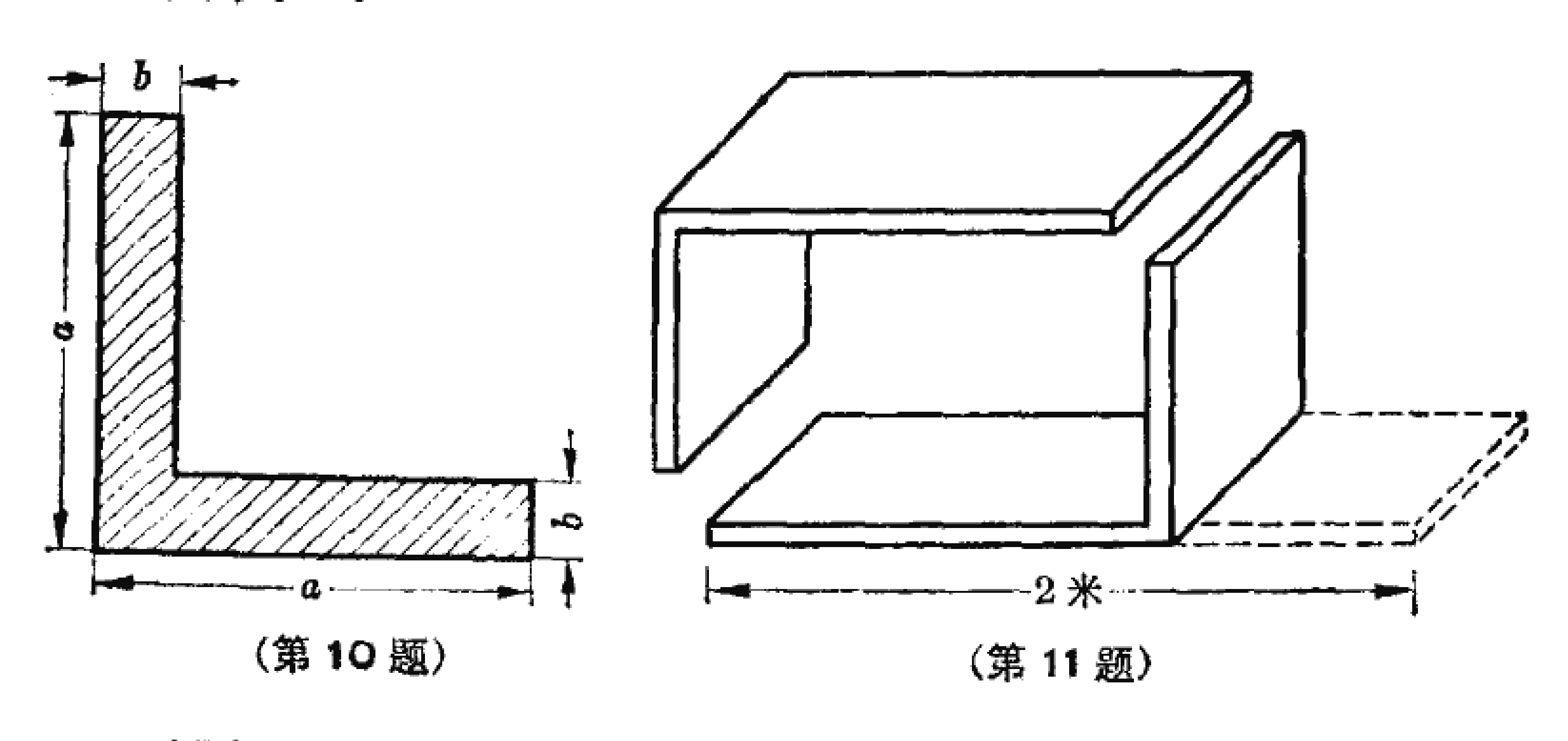


（第 7 题）　　　　（第 8 题）

8. 某建筑工程的施工中，打桩工人在吊桩时采用两点起吊，吊点的合理布置要由方程 $4x^2+4lx-l^2=0$ 的解来确定，其中 l 为桩的长度，求吊点离桩端的距离 x.

9. 物体由空中向下抛落时，如果不计空气阻力，则 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 s 表示物体下落的距离(米)，t 表示物体下落的时间(秒)，v_0 表示物体下落的初速度（米/秒)，若物体从 1000 米空中下落，求当 (1) $v_0=0$，(2) $v_0=1$ 米/秒时，物体落地所需的时间.

10. 一块角铁，它的截面如图所示，截面积为 736 毫米^2，其中 $a=50$ 毫米，求 b.



（第 10 题）　　　　（第 11 题）

11. 某厂需要安装横断面为长方形的通风管道，每节管道由两块长为 2 米的防水纤维板做成，如图所示，要求此管道每秒通过的风量为 9.375 米^3，风速是 10 米/秒，问管道的长方形横断面的长和宽各是多少？

12. 某国营农场计划在一定的天数内播种 2000 亩地，实际播种的时候，每天比原计划多播种 50 亩，从而提前 2 天完成了任务，问实际播种了几天？

第三节　不　等　式

在生产实践和科学实验中，量与量之间有相等的关系，也有不相等的关系．反映在数学上，我们不但要研究等式，也要研究不等式．这一节就来介绍有关不等式的知识．

一、不等式的概念

例如，圆的面积 A 大于它的内接多边形的面积 F，记作

$$A>F,$$

这里，"$>$"是"大于"的记号．

又如，三角形的任意一边 c 小于其它两边的和 $a+b$，可以记作

$$c<a+b,$$

这里，"$<$"是"小于"的记号．

记号"$>$"和"$<$"叫做不等号，用不等号联结两个代数式所成的式子，叫做不等式．当不等式含有未知数的时候，使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解．

下面讨论不等式的解与方程的解的不同意义．

例如，对于不等式 $x-3>5$，只要 x 取大于 8 的值，不等式就成立，而且，也只有当 x 取大于 8 的值时，这个不等式才

能成立. 所以该不等式的解是一切大于 8 的值, 记为 $x>8$.

而方程 $x-3=5$ 的解是 $x=8$, 这个解是一个确定的数. 上面的不等式的解 $x>8$ 不是一个确定的数, 而是表示了数的一个"范围".

为了直观地表示不等式的解的范围, 下面我们介绍有关数轴的概念.

恩格斯说: "**数和形的概念不是从其他任何地方, 而是从现实世界中得来的。**"①

在日常生活中, 人们常常用直尺上的刻度来测量长短, 用秤杆上的刻度来权衡轻重, 用温度计上的刻度来判定冷热. 这些事实, 都可以看成是用直线上的刻度表示数的大小. 如图 3-5 所示, 在一根直线上取定一点 O, 叫做原点, 选定一个正方向

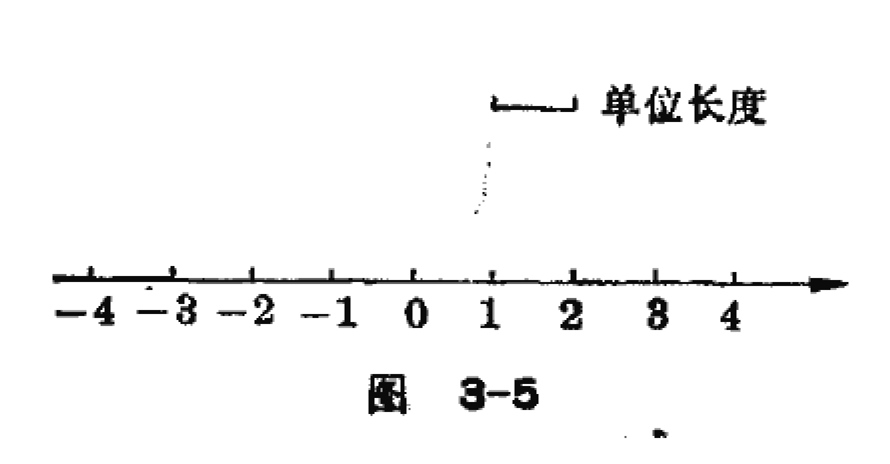


图 3-5

(如从左到右), 再截取一段长度规定为单位长度. 这样, 原点表示数零; 从原点向右按单位长度依次进行刻度, 它们分别表示正数 1, 2, 3, …; 从原点 O 向左按单位长度依次进行刻度, 它们分别表示负数 -1, -2, -3, …. 同样, 可以得到一般实数的表示法. 例如, $-\frac{3}{2}$ 就表示在原点向左 1.5 个单位长度处. 这种规定了原点、方向和单位长度的直线称为数轴.

这样, 数轴上的任意一点都有一个实数与之对应, 反之, 任何一个实数在数轴上也必有一点与之对应, 这就建立了数与数轴上点之间的一一对应关系.

数与数轴上的点之间建立了一一对应关系, 数的大小也

① 恩格斯: 《反杜林论》, 人民出版社 1970 年版, 第 35 页。

有了直观的解释．在数轴上规定从左到右的方向为正方向，那末，右边的点所对应的数总是大于左边的点所对应的数．于是，也可根据数在数轴上的位置得知，正数比负数大；零比正数小而比负数大；正数中绝对值大的数较大；负数中绝对值小的数较大．

有了数轴的概念，不等式 $x-3>5$ 的解 $x>8$，

$x>8$

0　8　x

图 3-6

就是指数轴上 8 的右方的一切点所对应的数，如图 3-6 所示（这里不包括 8，我们用小圈"∘"表示）．一般地说，不等式的解在数轴上总是表示为数的一个或几个"范围"．

二、不等式的变形

我们知道，在等式两边同时加、减一个数或者乘、除以一个非零的数，等式仍然成立．对于不等式，是否也具有类似的性质呢？为此，我们先观察一些具体的数字结果．

例如，对于不等式 $5>3$，分别讨论以下六种情形．

两边同加 2，得

$$5+2>3+2 \quad 即 \quad 7>5,$$

不等号保持不变．

两边同减 2，得

$$5-2>3-2 \quad 即 \quad 3>1,$$

不等号保持不变．

两边同乘 2，得

$$5\times2>3\times2 \quad 即 \quad 10>6,$$

不等号保持不变．

两边同乘 -2，得

$$5\times(-2)<3\times(-2) \quad 即 \quad -10<-6,$$

不等号反向.

两边同除以 2, 得

$$\frac{5}{2}>\frac{3}{2},$$

不等号保持不变.

两边同除以 -2, 得

$$\frac{5}{-2}<\frac{3}{-2} \quad 即 \quad -\frac{5}{2}<-\frac{3}{2},$$

不等号反向.

通过这个例子可以看出不等式具有下列基本性质:

性质 1 在不等式两边加上(或减去)同一个数, 不等号保持不变, 即

若 $a>b$, 那末 $a\pm c>b\pm c$.

性质 2 在不等式两边乘以(或除以)同一个正数, 不等号保持不变, 即

若 $a>b$ 且 $c>0$, 那末 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

性质 3 在不等式两边乘以(或除以)同一个负数, 不等号要反向, 即

若 $a>b$ 且 $c<0$, 那末 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

我们把不等式与等式的性质比较一下, 特别要引起注意的是在不等式的性质 3 中产生了不等号反向的情况.

在等式里, 我们根据等式的性质, 得到等式变形的规则是: 移加为减, 移减为加, 转乘为除, 转除为乘. 同样, 我们可以根据不等式的性质来推导它的变形法则.

例如, 对于不等式 $a+b>c$, 根据性质 1, 于两边同减 b 得

$$a>c-b.$$

这里，式中右边的 $-b$，可以看作是原不等式中左边的 b 移加为减到右边而得. 因此，不等式两边同减去一个数，相当于把这个数从不等式一边移加为减到另一边.

类似地，我们可以根据不等式的性质推导出其他的变形规则.

综合起来，我们把不等式的变形规则与等式变形规则列表比较如下：

	等　式	不　等　式	不等号
移加为减 移减为加	$a+b=c \rightleftarrows a=c-b$	$a+b>c \rightleftarrows a>c-b$	不等号不变
转乘为除 转除为乘	$a\cdot c=b \rightleftarrows a=\frac{b}{c}$ $(c\neq 0)$	$c>0$ 时 $a\cdot c>b \rightleftarrows a>\frac{b}{c}$	不等号不变
		$c<0$ 时 $a\cdot c>b \rightleftarrows a<\frac{b}{c}$	不等号反向

这里特别需要注意的是，当负数从不等式一边作转乘为除，或转除为乘到另一边时，不等号要反向。

三、不等式的解法

解不等式与解方程类似，就是利用不等式的变形规则，求出不等式的解.

［例 1］　解不等式 $1+3x<10-x$.

解：移加为减，移减为加，使已知项与未知项分别写在不等号的两边

$$3x+x<10-1,$$

即

$$4x<9,$$

转乘为除得

$$x<\frac{9}{4}.$$

这就是该不等式的解，即一切小于 $\frac{9}{4}$ 的 x 值均满足原不等式．这个解在数轴上表示如图 3-7 所示．

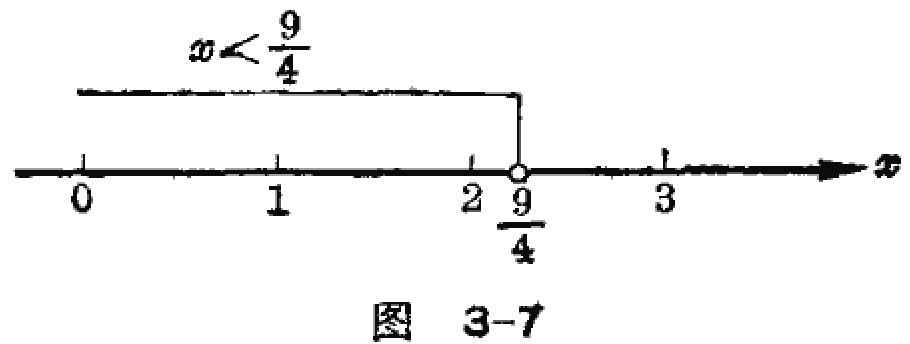


图 3-7

［例 2］ 实施爆破时，已知导火线燃烧的速度是每秒 0.8 厘米，人跑开的速度是每秒 4 米，为了使点燃导火线的战士在爆破时能跑到 500 米以外的安全地区去，导火线至少需要多少长？

解：设导火线长 x 厘米，那末导火线燃烧的时间是 $\frac{x}{0.8}$ 秒，战士到达安全地区的时间是 $\frac{500}{4}$ 秒．

为了确保战士的安全，必须使爆破所需的时间超过人到达安全地区的时间，用不等式表示这个不等量关系，即

$$\frac{x}{0.8}>\frac{500}{4},$$

转除为乘得

$$x>\frac{500}{4}\times 0.8 \quad 即 \quad x>100.$$

因此导火线的长度应该超过 100 厘米．

［例 3］ 解不等式

$$2(x-1)+\frac{x+2}{3}\leqslant\frac{7x}{2}+1 ①.$$

解：去分母，得

① 记号"≤"是把"<"和"="合写在一起，它的意思是"小于或等于"．同样，"大于或等于"用记号"≥"来表示．

$$12(x-1)+2(x+2)\leqslant 21x+6,$$

去括号，移加为减，移减为加，整理得

$$-7x\leqslant 14.$$

转乘为除，并注意这时不等号要反向，得

$$x\geqslant\frac{14}{-7}\quad 即\quad x\geqslant -2.$$

这个解在数轴上表示，如图 3-8 所示.

图 3-8

这里 $x\geqslant -2$，是指一切大于 -2 的数，包括数 -2 本身，在数轴上我们用一粗点"•"表示包括这个数.

[例 4] 解不等式 $-1<\frac{3-2x}{5}\leqslant 1.$

解：去分母，得

$$-5<3-2x\leqslant 5,$$

移加为减，得

$$-5-3<-2x\leqslant 5-3,$$

即

$$-8<-2x\leqslant 2,$$

转乘为除，并注意不等号要反向，得

$$\frac{-8}{-2}>x\geqslant\frac{2}{-2},$$

即

$$4>x\geqslant -1\quad (或\ -1\leqslant x<4),$$

在数轴上表示如图 3-9 所示.

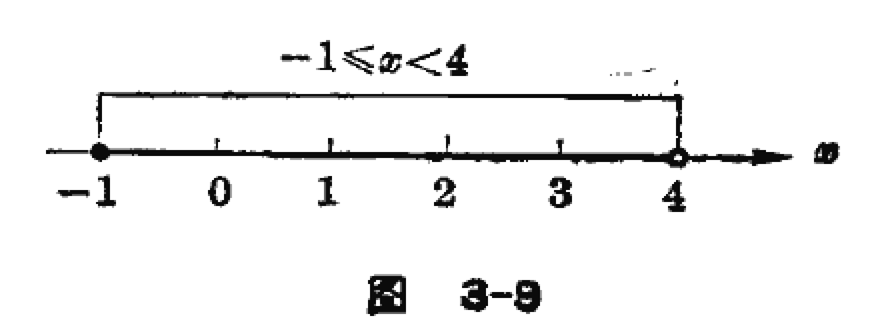


图 3-9

不等式的解在数轴上以区间的形式出现，我们

可用区间记号表示．如例 4 的解 $-1\leqslant x<4$，在数轴上是从 -1 到 4 间的一段（包括 -1，不包括 4），可用区间 $[-1, 4)$ 表示，这里方括号表示区间的这个端点包括在内，圆括号表示不包括区间该端点．例 1 的解 $x>\frac{9}{4}$，可用区间$\left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$表示（记号 ∞ 读作"无穷大"，表示数轴上无限远的点）．例 3 的解 $x\geqslant -2$，可用区间$[-2, +\infty)$表示．

又如图 3-10 中各种数的区间，分别用区间记号和不等式表示如下：

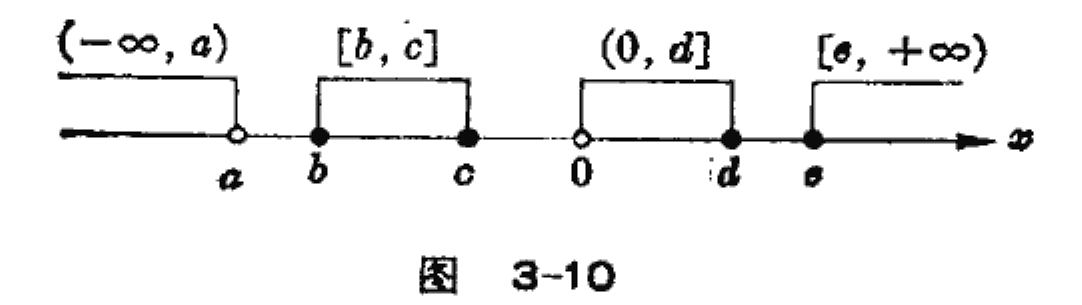


图 3-10

不等式表示： $x<a$； $b\leqslant x\leqslant c$；$0<x\leqslant d$； $x\geqslant e$．

区 间 表 示： $(-\infty, a)$； $[b, c]$； $(0, d]$； $[e, +\infty)$．

例 4 的不等式 $-1<\frac{3-2x}{5}\leqslant 1$，实际上是两个不等式组成的不等式组，即

$$\begin{cases}\frac{3-2x}{5}>-1, & (1)\\ \frac{3-2x}{5}\leqslant 1. & (2)\end{cases}$$

可以知道，不等式(1)的解是 $x<4$，不等式(2)的解是 $x\geqslant -1$，而该不等式组的解是不等式(1)和(2)解的公共部分，即区间$[-1, 4)$（见图 3-9）．

［例 5］ 解不等式 $\frac{3-2x}{x}<0$．

解：该不等式的含意是分式 $\frac{3-2x}{x}$ 取负值，所以分子

$3-2x$ 与分母 x 应取异号，这样就有两种情况：

(1) 分子为正、分母为负：

$$\begin{cases} 3-2x>0, \\ x<0; \end{cases} \tag{1}$$

(2) 分子为负、分母为正：

$$\begin{cases} 3-2x<0, \\ x>0. \end{cases} \tag{2}$$

这是两个不等式组，它们的解都是原不等式的解。

不等式组(1)即

$$\begin{cases} x<\frac{3}{2}, \\ x<0, \end{cases}$$

这里要求 x 既小于 $\frac{3}{2}$，又小于 0. 显然，同时满足这两个要求的 x 是所有小于 0 的数 (图 3-11)，所以不等式组 (1) 的解是 $x<0$，即 $(-\infty, 0)$.

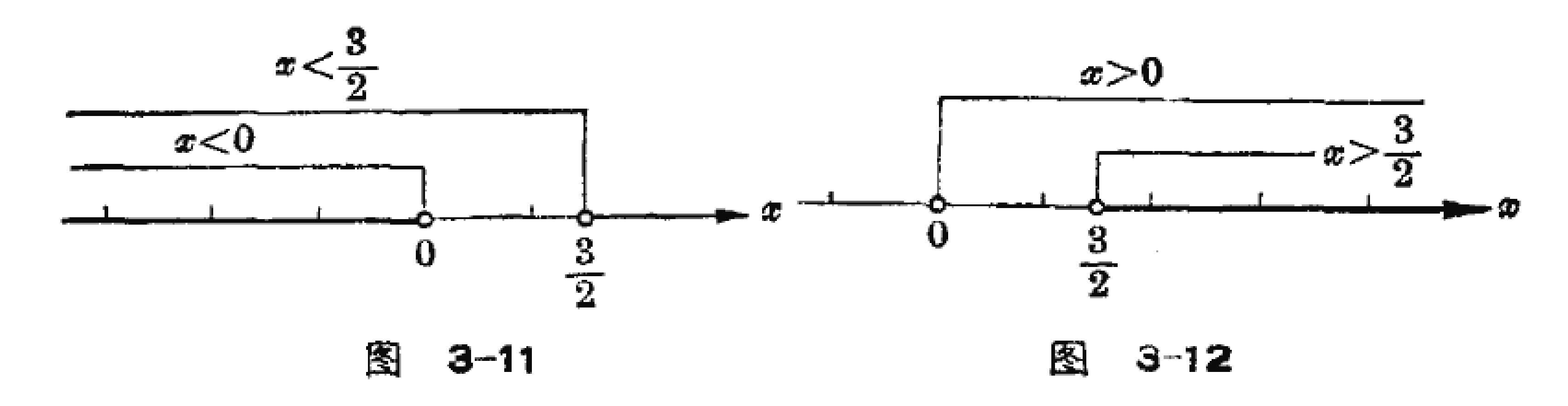


图 3-11　　　图 3-12

不等式组(2)即

$$\begin{cases} x>\frac{3}{2}, \\ x>0, \end{cases}$$

这里要求 x 既大于 0，又大于 $\frac{3}{2}$，故 x 应取一切大于 $\frac{3}{2}$ 的值 (图 3-12)，即不等式组 (2) 的解是 $x>\frac{3}{2}$，即 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

因此原不等式 $\frac{3-2x}{x}<0$ 的解由 $x<0$ 与 $x>\frac{3}{2}$ 组成,用区间表示为 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ (图 3-13)。

图 3-13

[例 6] 解不等式 $\frac{1-4x}{2-3x}<1$.

解:
$$\frac{1-4x}{2-3x}-1<0, \quad \frac{-1-x}{2-3x}<0,$$

按照例 5 可解得

$$-1<x<\frac{2}{3}.$$

或者,把不等号左边分母 $2-3x$ 转除为乘到不等号右边,但根据不等式变形规则,有两种情况:

(1) 当 $2-3x>0$ 时,不等号不变,即

$$\begin{cases} 2-3x>0, \\ 1-4x<2-3x. \end{cases} \tag{1}$$

(2) 当 $2-3x<0$ 时,不等号要反向,即

$$\begin{cases} 2-3x<0, \\ 1-4x>2-3x. \end{cases} \tag{2}$$

解不等式组(1),得

$$\begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ x>-1, \end{cases}$$

其解为

$$-1<x<\frac{2}{3} \quad 即 \quad \left(-1, \frac{2}{3}\right).$$

解不等式组(2)，得

$$\begin{cases} x>\dfrac{2}{3}, \\ x<-1, \end{cases}$$

这里要求 x 既要大于 $\frac{2}{3}$，又要小于 -1，这是不可能的，故不等式组(2)没有解.

所以，原不等式的解是 $-1<x<\frac{2}{3}$，即 $\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$.

[例 7] 解不等式 $x^2+4x+3>0$.

解：这是个二次不等式，经分解因式得

$$(x+1)(x+3)>0.$$

两个因式的积大于零，这两个因式必须同号，因此转化为两个不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x+1<0, \\ x+3<0. \end{cases} \tag{2}$$

(1)的解是 $x>-1$，(2)的解是 $x<-3$，所以该二次不等式的解是 $x>-1$ 和 $x<-3$，即 $(-1,\ \infty)$ 和 $(-\infty,\ -3)$.

从这个例子可以看出，解一元二次不等式与解一元二次方程类似，主要是把不等式一边的二次三项式分解因式，这样就转化为一次不等式的问题了.

四、含有绝对值的不等式

1. 绝对值

我们知道，一个数有绝对值的大小，还有符号的正负. 在生产实践中，有时我们只需要考虑数的绝对值.

例如，按规定的尺寸加工某种产品，要求加工出来的尺寸与规定的尺寸尽可能地接近，它们间的差用误差表示。现有两件加工出来的产品，第一件产品的误差 $x_1=0.2$ 毫米（正值表示比规定的尺寸大）；第二件产品的误差 $x_2=-0.4$ 毫米（负值表示比规定的尺寸小），哪一件产品加工得好呢？

显然，这里不能直接从 x_1 与 x_2 的值比较它们的大小，否则就会从 $x_2<x_1(-0.4<0.2)$ 得出"第二件产品加工得好"的结论，这是不符合实际情况的. 因为这里的所谓加工得好坏是指加工出来的尺寸与规定尺寸接近的程度，因此不是比较 -0.4 与 0.2，而是应该比较 0.4 与 0.2，所以结论是"第一件产品加工得较好".

从数轴上看，如图 3-14 所示，我们要比较的不是 $x_1(=0.2)$ 与 $x_2(=-0.4)$ 两数的大小，而是比较它们到原点的距离，我们在字母旁加两条竖线来表示，例如 $|x_1|$ 表示 x_1 到原点 O 的距离，$|x_1|=0.2$；$|x_2|$ 表示 x_2 到原点 O 的距离，$|x_2|=0.4$.

图 3-14

在数轴上，一个数 x 所对应的点到原点 O 的距离叫做这个数 x 的绝对值，记作 $|x|$，如

$$|2|=2, \quad \left|\frac{1}{5}\right|=\frac{1}{5}, \quad |-2|=2, \quad |-\sqrt{5}|=\sqrt{5}.$$

因此，一个数的绝对值总是正数，即正数的绝对值就是这个数本身，负数的绝对值是这个数的反号数，用式子表示如下：

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}, \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

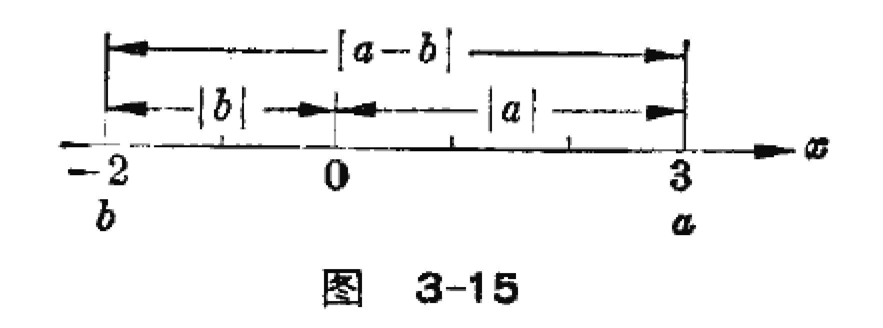


图 3-15

在数轴上，$|a|$ 表示数 a 到原点(零)的距离，$|a-b|$ 表示 a 到 b 的距离，如图 3-15 所示.

如 $a=3$，$b=-2$，a 到 b 的距离是 $|a-b|=|3-(-2)|=|5|=5$.

又如 $a=-3$，$b=-1$，a 到 b 的距离是

$$|a-b|=|(-3)-(-1)|=|-2|=2.$$

显然，$|a-b|=|b-a|$，即 a 到 b 的距离和 b 到 a 的距离是一样的.

2．含有绝对值的不等式

[例 8]　解不等式：(1) $|x|<a(a>0)$；(2) $|x|>a(a>0)$.

解：(1) 因为 $|x|$ 表示 x 到原点的距离，所以，满足不等式 $|x|<a$ 的所有 x 值，就是数轴上到原点距离小于 a 的所有 x 值. 从图 3-16 中可见，这种值在 $-a$ 与 a 之间. 于是，不等式的解为

$$-a<x<a, \quad 即 \quad (-a, a).$$

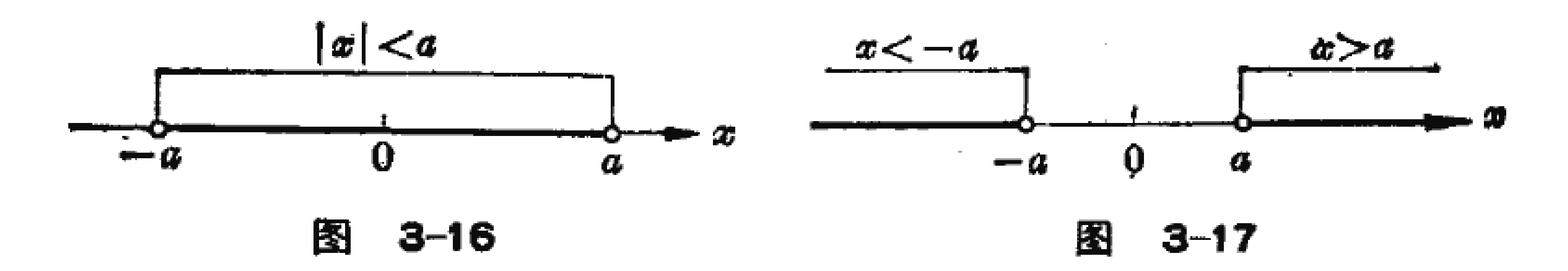


图 3-16　　　　图 3-17

(2) 不等式 $|x|>a$ 的解，即数轴上与原点距离大于 a 的所有 x 值. 从图 3-17 可见，这种值在数轴上位于 a 点之右或 $-a$ 点之左. 于是不等式的解由

$$x<-a \quad 和 \quad x>a$$

组成，即$(-\infty, -a)$和$(a, +\infty)$.

[例 9] 用车床生产铣床上的零件，要求外圆直径为 50 毫米，而误差不能超过 0.05 毫米，那末外圆直径的允许范围是多少？

解：设合格的外圆直径为 x 毫米. 根据题意，合格的外圆直径与规定的外圆直径相差不能超过 0.05 毫米，写成不等式，即

$$|x-50|\leqslant 0.05.$$

在例 8 中，曾得出 $|x|<a$ 的解为 $-a<x<a$. 与此类似，$|x-50|\leqslant 0.05$ 可化为

$$-0.05\leqslant x-50\leqslant 0.05,$$

在不等式各端同加 50，得到解为

$$49.95\leqslant x\leqslant 50.05.$$

故合格的外圆直径应在 49.95 毫米到 50.05 毫米之间.

我们再从数轴上直观地看这个不等式的解(图 3-18). 不等式 $|x-50|\leqslant 0.05$ 的解 x 表示与 50 的距离不超过 0.05 的所有数，显然应在 $50-0.05=49.95$ 到 $50+0.05=50.05$ 之间，即$[49.95, 50.05]$.

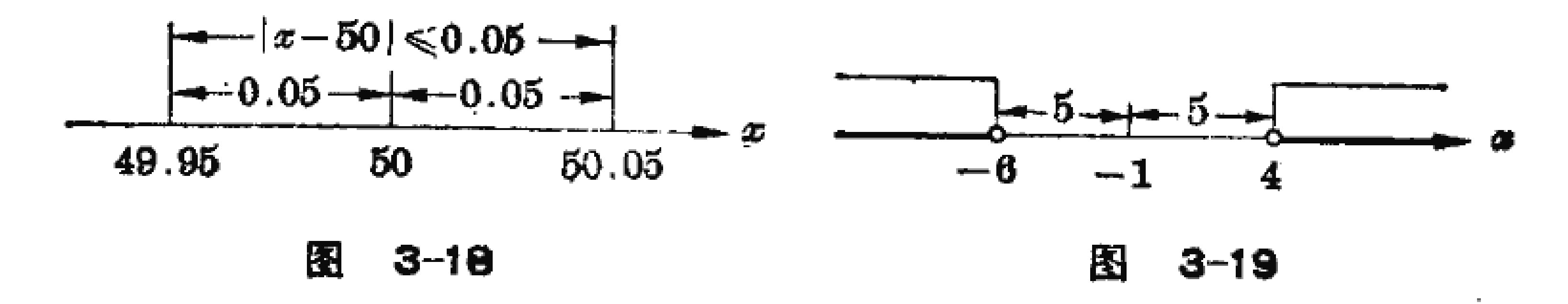


图 3-18　　　　图 3-19

[例 10] 解不等式 $|x+1|>5$.

解：从例 8 和图 3-17 知，$|x|>a(a>0)$ 的解为 $x>a$ 和 $x<-a$，与此类似，不等式 $|x+1|>5$ 的解由

$$x+1>5 \quad 和 \quad x+1<-5$$

构成，即解为

$$x>4 \quad 和 \quad x<-6.$$

在数轴上表示为$(-\infty, -6)$和$(4, +\infty)$(图 3-19)。

小　结

1．数轴

数与数轴上的点之间的一一对应关系：任何一个实数可用数轴上的一个点来表示；数轴上的一个点表示一个实数．

一个数的绝对值，就是这数在数轴上对应的点到原点的距离．

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0, \\ -a & a<0. \end{cases}$$

2．不等式的变形规则：移加为减，移减为加；转乘为除，转除为乘．但当乘以或除以负数时，要注意改变不等号的方向．即

当$c<0$时，

$$a\cdot c>b \rightleftarrows a<\frac{b}{c}.$$

3．能使不等式成立的未知数x的值，是不等式的解．不等式的解通常是无穷多个数，可用数轴上的区间来表示．

习　题

1．在数轴上表示下列各组数，并比较a与b的大小：

(1) $a=4,\ b=-5$;　　(2) $a=-6,\ b=0$;

(3) $a=-1.5,\ b=-2$;　　(4) $a=-5,\ b=1.5$;

(5) $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3}$.

2．已知$a>b$，试用不等号联结下列各题中的两式：

(1) $a+5$和$b+5$;　　(2) $a-b$和0;

(3) $-5a$ 和 $-5b$;　　(4) $\frac{a}{2}$ 和 $\frac{b}{2}$;

(5) $-\frac{a}{3}$ 和 $-\frac{b}{3}$.

3. 在数轴上标出下列不等式所示范围，并用区间记号表示出来:

(1) $x>5$;　　(2) $x<-\frac{3}{2}$;

(3) $1<x\leqslant 4$;　　(4) $3>x>-3$.

4. 解下列各不等式，并把它们的解在数轴上和用区间记号表示出来:

(1) $x+3>8$;　　(2) $10+x<12$;

(3) $3(x+2)>6$;　　(4) $7-\frac{4}{3}x<5$;

(5) $\frac{5(x-1)}{6}>\frac{3x-1}{2}$;　　(6) $2+\frac{3(t+1)}{8}<3-\frac{t-1}{4}$;

(7) $ax+b\leqslant c$;　　(8) $(x+1)(x-1)>0$;

(9) $\frac{1-3x}{x-2}<0$;　　(10) $\frac{x+1}{x-1}<5$;

(11) $\frac{2x-1}{3(x+1)}\geqslant 1$;　　(12) $x^2-3x\leqslant 4$.

5. (1) 用不等式分别表示:

(i) a 是正数,　　(ii) a 是负数;

(2) x 取什么值时，下列代数式是正数？是零？是负数？

(i) $2(x+3)-5$,　　(ii) $-4(x-3)+5$.

6. 某工厂生产一种产品，每 100 件的成本是 350 元. 改进设计后，成本可以降低 10% 到 20%，求改进设计后每件产品的成本范围.

7. 一个工程队规定要在 6 天内完成 300 立方米的土方工程，第一天完成了 60 土方，现在要比原计划提前二天超额完成任务，问以后每天平均最少要完成多少土方?

8. 一般规定电动机的使用电压不能超出规定工作电压的 10%，也不能低于工作电压的 5%. 如用 U 表示使用电压，U_0 表示工作电压，试用不等式表示工作电压与使用电压的关系.

9. 求下列各值:

(1) $|(-2)^3|$, $|4-5|$, $|5-4|$, $|5|-|3|$, $|5-(-3)|$;

(2) 若 $a=0.4$, $b=-0.3$, 求

$|a-b|$, $|b-a|$, $||a|-|b||$, $||b|-|a||$; $|a-b|^2$。

10. 求下列各式中 x 的值:

(1) $|x-1|=1$;　　(2) $|3x+2|=2$。

11. 解下列不等式:

(1) $|x|<10$;　　(2) $|x|>5$;

(3) $|3x|<10$;　　(4) $|x+4|<10$;

(5) $|5x-3|\leqslant 1$;　　(6) $|x-a|<b$;

(7) $|x+a|\geqslant b$。

复 习 题

1. 试指出下列等式中，哪些是方程？哪些是恒等式？

(1) $x(b+c)=bx+cx$;　　(2) $5x+10-2x\doteq 3x+10$;

(3) $6x=1$;　　(4) $y-5=5-y$.

2. 如果在解方程 $3(x-4)=2(x-4)$ 的时候，把方程的两边都除以 $x-4$，那末结果得到 $3=2$，这个解法错在哪里？ 应该怎样解才是正确的？

3. 解下列方程组(a、b、c、l、k 为已知数):

(1) $\begin{cases} 0.86p+0.71q=2.71, \\ p+q=3.5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}, \\ 3(x-1)=5(y+1); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+2y=4, \\ 3x+3y=6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y=0, \\ 2x-2y=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2, \\ bx+ay=a^2+b^2; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dfrac{lx+1}{k+y}=1, \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{k+l}{k-l}; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{2}=\dfrac{x+y}{3}; \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x+y=a, \\ x-z=b, \\ y-z=c; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} yz=3x, \\ zx=4y, \\ xy=12z. \end{cases}$

4. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2(x-3)=1-5y, \\ 3(y+2)=4-3x; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+4y=7a-b \\ 4x+3y=7a+b \end{cases}$ (a, b 是已知数);

(3) $\begin{cases} 5x+2y=7, \\ 10x+4y=6; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 7x-3y=11, \\ \dfrac{x}{2}+5y+6z=0, \\ 3x+y+z=6; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y=z \\ 2x+y-2z=-b \\ x-y+z=2a \end{cases}$ (a, b 是已知数);

(6) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-y+2z=5, \\ 2x-3y+z=2. \end{cases}$

5. 解下列方程(a、b、p、q 为已知数):

(1) $(t-3)(t-1)=15$;

(2) $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$;

(3) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;

(4) $(x+4)^3-(x-4)^3=128$;

(5) $x^2+2ax-3a^2=0$;

(6) $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2 \quad (a^2\neq b^2)$;

(7) $(x+a)(x-b)+(x+b)(x-a)=2a(ax-b)$;

(8) $x^2+px+q=0$.

6. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

(1) 验证两根之积等于 $\frac{c}{a}$，即 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$；

(2) 验证两根之和等于 $-\frac{b}{a}$，即 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

7. 判断 k 为何值时，下列方程有两个不等的实数根、重根、复数根？

(1) $-x^2-3x+k=0$；　　(2) $x^2-2kx+9=0$.

8. 解下列方程：

(1) $4x^4-17x^2+4=0$；　　(2) $x^5-2x^3-3x=0$；

(3) $x^3+x^2-2x-2=0$；　　(4) $\left(\frac{x^2-6}{x}\right)^2-5\left(\frac{x^2-6}{x}\right)+6=0$；

(5) $x-3+\frac{1}{x-2}=\frac{2x-3}{x-2}$；　　(6) $\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{2}$；

(7) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x-4}=0$；

(8) $\sqrt{3x+2}+2=3\sqrt[4]{3x+2}$.

9. 解下列方程组（a、b 为已知数）：

(1) $\begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2, \\ x+y=a+b; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=5, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10, \\ \sqrt{xy}=16; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 2x+\frac{5}{y}=17, \\ 3x+\frac{4}{y}=15. \end{cases}$

10. 解下列不等式，并把解在数轴上和用区间形式分别表示出来：

(1) $\frac{(2x+1)^2}{-2}+x(2x-1)\geqslant 10$；　　(2) $x^2\leqslant 3x$；

(3) $\frac{1}{x-4}<1-\frac{x}{4-x}$；　　(4) $\left|\frac{x}{2}\right|\geqslant 5$；

(5) $5<|5x-3|<10$.

11. 一种工业用酸，甲罐内盛着浓度是 75% 的，乙罐内盛着浓度是 20% 的，要从两罐内各倒出多少，才能配制成浓度是 35% 的酸 11 公斤？

12. 一个正方体的棱长比一个长方体的长少 2 厘米，比长方体的宽多 2 厘米，而和长方体的高相等；正方体的体积比长方体的体积多 40 立方厘米，求正方体和长方体的体积.

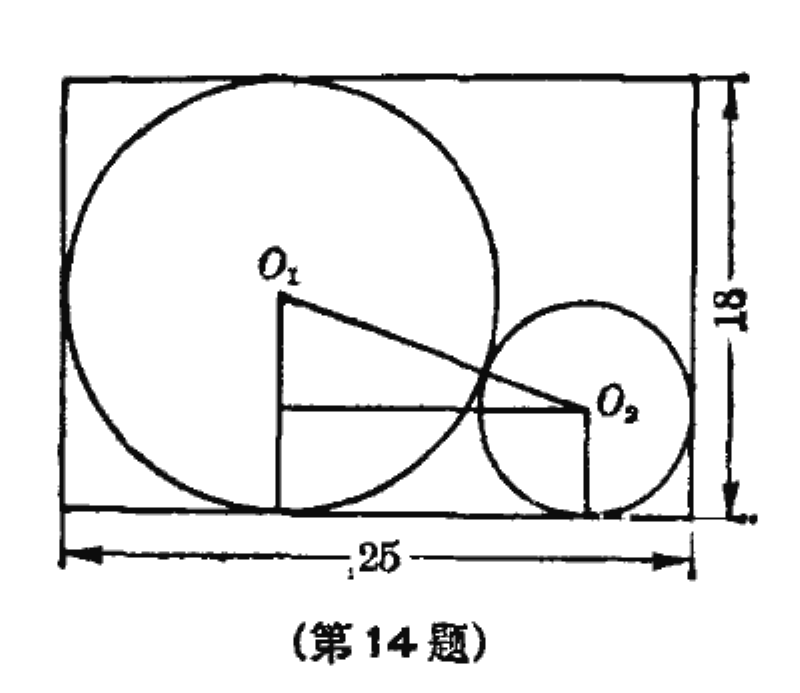
13. 用每秒 40 米的速度从平地向上抛掷的物体，经过 t 秒后，物体的高度 $h=40t-5t^2$（米），问

(1) 经过多少秒后物体的高度是 75 米？

(2) 经过多少秒后物体的高度是 80 米？

(3) 经过多少秒后物体的高度是 85 米？

14. 一块长 25 厘米，宽 18 厘米的铁板，去掉一个与三边相切的圆 O_1 后，剩下的铁板还能剪出多大直径的圆 O_2？



（第 14 题）

第四章　指数与对数

在社会实践的推动下，数的运算由加、减发展到乘、除，又由乘、除发展到乘方、开方．但正如毛主席指出的："**客观现实世界的变化运动永远没有完结，人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结。**"随着社会实践的进一步发展，又使数的运算发展到指数运算和对数运算．这种运算可把乘除转化为加减，把乘方、开方转化为乘除，因而可使一些复杂的计算大大简化．

本章先把指数概念由正整数推广到实数，然后着重讨论对数的概念、性质及利用对数进行计算的方法．

第一节　指　　数

一、整数指数

前面已经讲过了正整数指数幂，它有以下一些运算规则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m > n);$$

$$(a^n)^m = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

前三条运算规则表明，同底数幂的乘、除与乘方，可分别转化为指数的加、减与乘.

但指数限于正整数的幂，不能满足实际应用的需要，因此就有必要把指数概念扩充到一切实数.

例如，一种铀，当其原子核裂变时，每公斤铀可放出热量 1.435×10^{10} 千卡（卡为热量单位），又知每公斤铀含有 2.563×10^{24} 个原子核，所以一个铀原子核裂变时放出的热量是

$$\frac{1.435\times10^{10}}{2.563\times10^{24}}=\frac{1.435}{2.563}\times\frac{10^{10}}{10^{24}}=0.56\times\frac{10^{10}}{10^{24}}\text{ （千卡）}.$$

这里，我们遇到了同底数幂相除而分母的指数大于分子的指数的情形. 为了使得幂的除法运算规则对于这种情形仍然有效，就必须引进指数为负整数的幂，也就是说，为了使同底数幂相除，底数不变，指数相减这一规则，在整数范围内都能施行，必须有

$$\frac{10^{10}}{10^{24}}=10^{10-24}=10^{-14}. \qquad (1)$$

负整数指数的幂是什么意义呢？我们知道，

$$\frac{10^{10}}{10^{24}}=\frac{10^{10}}{10^{10}\cdot10^{14}}=\frac{1}{10^{14}}. \qquad (2)$$

比较(1)与(2)可看出 10^{-14} 应为 $\frac{1}{10^{14}}$.

一般地，我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad (a\neq0,\ n\text{ 为正整数}).$$

这就是说，任何不为零的数，它的负整数指数幂表示相应正整数指数幂的倒数.

例如根据负整数指数幂的概念有

$$(2)^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

$$(-\sqrt{3})^{-2}=\frac{1}{(-\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3}.$$

在实际应用中，常常将许多微小的量写成以10为底的负整数指数的幂．例如，

$$0.1=\frac{1}{10}=10^{-1},\ 0.01=\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2},$$

$$0.001=\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}=10^{-3},\quad \cdots$$

$$\underbrace{0.0\cdots0}_{n\text{个零}}1=\frac{1}{1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个零}}}=\frac{1}{10^n}=10^{-n}.$$

又如，氢原子中电子与原子核之间的最近距离 0.00000005305 厘米可表示为

$$5.305\times0.000000001=5.305\times10^{-9}\text{厘米}.$$

再如，

$$1\text{厘米}=0.01\text{米}=10^{-2}\text{米},$$
$$1\text{微秒}=0.000001\text{秒}=10^{-6}\text{秒},$$
$$1\text{克}=0.001\text{公斤}=10^{-3}\text{公斤}.$$

再讨论零指数幂．为了使得幂的除法运算规则

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

对 $m=n$ 的情况仍然有效，就必须引进指数为零的幂，即

$$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0, \tag{3}$$

但

$$\frac{a^n}{a^n}=1, \tag{4}$$

比较(3)和(4)，可看出 a^0 应为1.

一般地，我们规定

$$a^0=1 \quad (a\neq 0).$$

这就是说，任何不等于零的数的零次幂都为1.

例如，$3^0=1$，$(-0.25)^0=1$.

指数概念从正整数推广到零和负整数后，对于幂的五条运算规则仍然成立. 因为我们是在保证五条运算规则成立的前提下，把指数概念从正整数推广到零和负整数的.

下面，进一步举例说明五条运算规则的应用.

[例1] 计算下列各式：

(1) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$；　　(2) $\left(\frac{b}{ac^2}\right)^{-n}$；

(3) $\frac{(ab^2)^{-3}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$；　　(4) $\frac{(a^2b)(ab^2)^{-2}}{\left(\frac{b}{a^2}\right)^{-3}}$.

解：(1) $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=(a^{-1})^{-n}=a^{(-1)\times(-n)}=a^n$；

(2) $\left(\frac{b}{ac^2}\right)^{-n}=(ba^{-1}c^{-2})^{-n}=a^{(-1)\times(-n)}b^{-n}c^{(-2)\times(-n)}$

$=a^nb^{-n}c^{2n}$；

(3) $\frac{(ab^2)^{-3}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{a^{-3}b^{-6}}{b^2a^{-2}}=a^{-3}b^{-6}b^{-2}a^2=a^{-1}b^{-8}$；

(4) $\frac{(a^2b)(ab^2)^{-2}}{\left(\frac{b}{a^2}\right)^{-3}}=(a^2b)(ab^2)^{-2}\left(\frac{b}{a^2}\right)^3=\frac{a^2ba^{-2}b^{-4}b^3}{a^6}$

$=\frac{a^0b^0}{a^6}=a^{-6}$.

[例2] 设 $y=(-abx^{-2})^2\frac{ab}{(ac)^{-2}(b^{-2}cx^{-3})^2}$，求

(1) 当 $x=10$, $a=2$, $b=-1$ 时的 y 值;

(2) 当 $x=3$, $a=-1$, $b=2$ 时的 y 值.

解: 先化简,再求 y 值.

$$y=(-abx^{-2})^2\frac{ab}{(ac)^{-2}(b^{-2}cx^{-3})^2}$$

$$=(-1)^2a^2b^2x^{-4}\frac{ab}{a^{-2}c^{-2}b^{-4}c^2x^{-6}}=a^5b^7c^0x^2=a^5b^7x^2.$$

(1) 当 $x=10$, $a=2$, $b=-1$ 时,

$$y=2^5\cdot(-1)^7\cdot10^2=32\times(-1)\times100=-3200;$$

(2) 当 $x=3$, $a=-1$, $b=2$ 时,

$$y=(-1)^5\cdot2^7\cdot(3)^2=-(128\times9)=-1152.$$

二、分数指数

乘方运算可以用幂的形式来表示, 对于它的逆运算——开方,是否也可以用幂的形式来表示呢?

在学习开方时,我们知道

$$(\sqrt{8})^2=8.$$

假如把 $\sqrt{8}$ 写成以 8 为底的幂 8^α, 并允许使用幂的运算规则,那末,从上式得

$$8=(\sqrt{8})^2=(8^\alpha)^2=8^{2\alpha},$$

于是

$$2\alpha=1,$$

即

$$\alpha=\frac{1}{2}.$$

因此,我们规定记号

$$8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}.$$

一般地,我们规定

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\quad(a\geqslant0,\ n\text{ 为正整数}).$$

这就是说，任何正数的 n 次方根（算术根），可以表示为这个数的 $\frac{1}{n}$ 次幂.

对于幂 $(a^m)^{\frac{1}{n}}$，按幂的第三条运算规则，有

$$(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{m\cdot\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}},$$

右端出现了以 a 为底的分数指数幂.

一般地，我们规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},$$

其中 $a>0$，m 和 n 都是正整数.

例如，

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4,$$

$$9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9^3}}=\frac{1}{27}.$$

指数概念已扩充到分数，运算仍按通常的规则进行，例如

$$a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{7}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{7}}=a^{\frac{11}{21}},$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}(bc^{\frac{1}{3}})^2}{\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^2c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{4}{3}}}=a^{\frac{1}{2}}b^{2+\frac{4}{3}}c^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{10}{3}}c^{-\frac{2}{3}}.$$

有了分数指数幂以后，“**幂可以写作根($x^2=\sqrt{x^4}$)，根可以写作幂($\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$)。**”① 幂与根式便统一起来了，从而根式运算可以通过幂的运算来完成.

［例 3］ 化简：

(1) $(\sqrt[3]{\sqrt{x^3}})^4$；　　　　(2) $\sqrt{\frac{y^2}{x^3}\sqrt[3]{xy^2}}$.

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 235 页。

解：(1) $(\sqrt[3]{\sqrt{x^3}})^4=(\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}})^4=x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}=x^2$;

(2) $\sqrt{\frac{y^2}{x^3}\sqrt[3]{xy^2}}=[y^2x^{-3}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{2}}=[x^{-\frac{8}{3}}y^{\frac{8}{3}}]^{\frac{1}{2}}=x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{4}{3}}$.

[例 4] 计算 $[a^{\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}]^2$ 在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 时的值.

解：先化简：

$$[a^{\frac{3}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}]^2=[a^{\frac{3}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{2}{3}}]^2$$

$$=[a^{\frac{5}{3}}b^2]^2=a^{\frac{10}{3}}b^4.$$

把 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 代入上式，得

$$a^{\frac{10}{3}}b^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{10}{3}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^4=(2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{10}{3}}\cdot(2^{-\frac{1}{3}})^4$$

$$=2^{-\frac{5}{3}}\cdot2^{-\frac{4}{3}}=2^{-\frac{9}{3}}=2^{-3}=\frac{1}{8}.$$

[例 5] 计算 $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}\div\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}}{3}}$ 的值.

解：$\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}\div\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}}{3}}=(2\cdot3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\div\frac{(8^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{6}}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{2}}=2^0\cdot3^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}\approx1.73.$$

[例 6] 化简 $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

解：$\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}.$$

到现在为止，我们已经把指数概念从最初的正整数推广到了负整数、零、正负分数，即代数式

$$a^x \quad (a>0)$$

对于任何有理数 x 都有意义．当 x 为无理数时，可以用它的有限位小数的近似值代替，而有限位小数总可以表示成分数．

我们把 $a^x(a>0)$ 叫做指数式，其中 a 是底数，x 是指数，x 可取一切实数．

当指数 x 为任何实数时，由于引进了负指数，除法转化为乘法，如

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=(a\cdot b^{-1})^x=a^x b^{-x}.$$

因此幂的五条运算规则可以统一成三条：

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2};$$

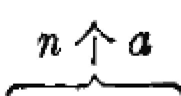
$$(ab)^x=a^x b^x;$$

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1 x_2}.$$

至于幂 a^x 的一般计算方法要到下一节介绍对数后才能解决．

小　　结

1．指数式 $a^x(a>0)$，当指数 x 取任何实数时，它们的意义分别是：



(1) 指数 x 为正整数 n 时，$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n\text{个}a}$；

(2) 指数 x 为零时，$a^0=1$；

(3) 指数 x 为负整数 $-n$ 时，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$；

(4) 指数 x 为分数 $\pm\dfrac{m}{n}$ 时，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$；

(5) 指数 x 为无理数时，可以用一个有限位小数近似地代替它，从而归结为分数指数的情况.

2. 指数式 a^x $(a>0)$，具有如下的运算规律：

(1) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$；

(2) $(ab)^x=a^xb^x$；

(3) $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$.

习　题

1. 计算下列各式的值：

(1) 5^{-1}, 10^{-2}, 2^{-4}, $(3750)^0$, 1^{-10}, $(-2)^{-1}$；

(2) $(0.1)^{-3}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$, $(-0.003)^0$；

(3) $2a^0-(2a)^0$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$, $(a\times a^{-1})^4$.

2. 把下列各数写成 $a\times10^{\pm n}$ 形式(a 在 1 与 10 之间)：

(1) 地球绕太阳运行的线速度大约是 300000 厘米/秒；

(2) 原子的直径约是 0.00000001 厘米；

(3) 氢核的半径是 0.0000000000027 厘米.

3. 把下列各式变形，使不含负指数：

(1) abc^{-2}；　　(2) $2a^{-3}b^{-1}c^2$；

(3) $\dfrac{xy}{z^{-2}}$；　　(4) $\dfrac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}$；

(5) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$.

4. 计算或化简下列各式：

(1) $(0.2^2)^3$;　　(2) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$;

(3) $a^2\cdot a^3\cdot a^{-4}$;　　(4) $\frac{3a^3x}{2a^2b^2x^4}$;

(5) $\frac{50x^{-2}y^5}{15x^6y^{-2}}$;　　(6) $\frac{40a^3b^4c^{-4}}{a^3ab^2c}$;

(7) $(3x^2y)^{-4}$;　　(8) $(axy)^{-2}\left(\frac{ax}{y}\right)^3$;

(9) $(-2x^{-2}y^3)^{-3}$;　　(10) $\frac{(2a^2x^3)^4}{6(a^{-1}x^2)^{-2}}$.

5. 化简下列各式：

(1) $(a^2b^3)^{-2}\cdot(-a^3b)^2$;

(2) $\frac{1}{(ab^{-2}x)^2}\cdot\left(\frac{a^2}{2b}\right)^{-2}\cdot\frac{(ab)^{-1}x}{a(bx^2)^{-1}}$;

(3) $(ab^{-2}x)^3\cdot\left(\frac{ab^2}{c^2}\right)^{-3}\cdot\frac{(ax^2)^{-2}}{(ab^2)^3b^{-1}}$;

(4) $\frac{(a^2b^{-2})^3}{\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2}}\cdot\frac{\left(\frac{a^{-2}}{b}\right)^3}{\left(\frac{b^3}{a^2}\right)^{-2}}$;

(5) $(a^2b)^{-1}\left(\frac{b}{a^2}\right)^3\cdot\frac{c}{\left(\frac{a}{b^2}\right)^3}$.

6. 设

$$y_1=\frac{x}{(1+x)^{-3}},\quad y_2=\frac{x^{-2}(1-x)^3}{1+x},$$

分别计算 $x=3$ 与 $x=\frac{2}{3}$ 时 y_1, y_2 的值.

7. 设

$$y=\frac{(rs^2t^2)^2}{\left(\frac{t^3r}{s^{-2}}\right)^5}\cdot\frac{(r^{-1}s^{-2}t^{-3})^{-3}}{t(rs)^{-1}},$$

(1) 求当 $r=2$, $s=3$, $t=4$ 时的 y 值;

(2) 求当 $r=3$, $s=4$, $t=5$ 时的 y 值;

(3) 求当 $r=4$, $s=5$, $t=6$ 时的 y 值.

8. (1) 我国自行设计的某万吨水压机活塞压强是300公斤/厘米^2, 活塞面积 4×10^4 厘米^2, 求该万吨水压机的压力(压强=压力/面积);

(2) 如果 $f=\frac{q_1q_2}{r^2}$, 当 $q_1=q_2=\frac{15}{10^{10}}$, $r=\frac{5}{10^{12}}$ 时, 求 f;

(3) 如果 $P=\frac{1.013\times10^6}{760}\times0.01$, $K=1.38\times10^{-16}$, $T=300$, 按公式 $\eta=\frac{P}{KT}$ 计算 η.

9. 把下列根式写成分数指数幂的形式:

$\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{x^7}$; $\sqrt[5]{ax^2}$;

$\sqrt{\frac{x}{y}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$; $\frac{1}{\sqrt{y^3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{by}}$.

10. 把下列分数指数幂写成根式:

$3^{\frac{1}{2}}$; $4^{-\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{5}{3}}$; $y^{-\frac{4}{3}}$; $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{y^{-\frac{1}{4}}}$.

11. 化简下列各式:

(1) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}$; (2) $(x^4y^{-3})(x^{-2}y^2)$;

(3) $\left(-\frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)$; (4) $(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})^2$;

(5) $\frac{5a^{-2}b^{-3}}{5^{-1}a^2b^{-3}}$; (6) $\left(\frac{8x^{-3}}{27y^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

(7) $\sqrt[4]{c^{-\frac{4}{3}}d^{-2}}$; (8) $\left(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)^2$;

(9) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$.

12. 计算下列各式:

(1) $x^2(4x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}+1)$; (2) $(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^2$;

(3) $(2a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{4}})(3b^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{3}})$.

13. 将下列公式变形:

(1) $ah^2=(1+H^2)^{2/3}$ 写成求 H (正数)的公式;

(2) $\alpha u^{\frac{3}{2}}+\beta v^{\frac{3}{2}}=\gamma$ 写成求 v (正数)的公式.

第二节　对　　数

一、对数的概念

在生产实践与科学技术研究中，人们经常遇到计算量较大的有关乘、除、幂的计算式，因而提出了简化计算的要求；而且，到目前为止，许多幂的计算还有待解决．为此，本节介绍对数概念及其计算方法．

先举两个例子．

[例 1]　某化肥厂今年生产 2000 吨合成氨，计划以后每年比上年增产 20%．问多少年后年产量可达 5000 吨？

设所求的年数为 x，那么

一年后的年产量：$2000\times(1+0.2)=2000\times1.2$ (吨)，

二年后的年产量：$2000\times1.2\times(1+0.2)=2000\times1.2^2$ (吨)，

三年后的年产量：$2000\times1.2^2\times(1+0.2)=2000\times1.2^3$ (吨)，

…………

x 年后的年产量：2000×1.2^x (吨)．

根据题意，应有

$$2000\times1.2^x=5000,$$

即

$$1.2^x=2.5.$$

这就要我们求出 2.5 是 1.2 的几次幂，也就是已知幂和底数，求指数的问题．

[例 2]　电容器放电时，端电压 u 与时间 t 的关系是 $u=u_0e^{-kt}$ (其中 e 是常数 2.718…，k 是正的常数)．设常数 $k=1$，且开始时的电压 $u_0=10$ 伏．当端电压 u 降到原电压 (10 伏) 的 5% 时就算放电结束．问放电从开始到结束需要多少时间？

已知 $$u=u_0e^{-kt},$$
把 $u_0=10$ 伏和 $k=1$ 代入，得电压 u 与时间 t 的关系为
$$u=10e^{-t}.$$

当端电压 u 降到原电压的 5% 时，就算放电结束．这时的电压为
$$u=10\times\frac{5}{100}=0.5\ (伏),$$
所以待求的时间 t 满足
$$0.5=10e^{-t},$$
即
$$e^t=20.$$
这里要求的是 t 的值，也是已知幂和底数，求指数的问题．

以上都是已知底数和幂，反过来求指数的问题．这类问题可以归结成这样的形式：已知 N 和 a，求 x，使
$$a^x=N.$$
这种运算，叫做求对数．

定义 如果
$$a^x=N\quad(a>0,\ a\neq1),\tag{1}$$
我们就把 x 叫做以 a 为底的 N 的对数．N 叫真数，a 叫底数，记作
$$\log_a N=x\quad(a>0,\ a\neq1).\tag{2}$$

因为 $a>0$，所以，不论 x 取任何实数值，$N=a^x$ 恒为正数．

在底数 a 固定的情况下，若已知 x，则可从指数式 (1) 求出 N；反之，若已知 N，则可由对数式(2)求出 x．因此，在底数一定的时候，求指数式的值与求对数式的值互为逆运算．

现在我们列表将指数式 $a^x=N$ 和对数式 $\log_a N=x$($a>0$，且 $a\neq1$)进行比较，以便更清楚地看出它们的内在联系．

$a>0,\ a\neq1$	a	x	N	意　　义
指数式　$a^x=N$	底数	指数	幂	a的x次幂等于N
对数式 $\log_a N=x$	底数	对数	真数	以a为底的N的对数等于x

例如指数式$10^3=1000$，可以换成对数式$\log_{10}1000=3$，读作以10为底1000的对数等于3．同样，

由$10^{-2}=0.01$得　　　　$\log_{10}0.01=-2$;

由$2^4=16$得　　　　　　$\log_2 16=4$;

由$5^{-2}=0.04$得　　　　$\log_5 0.04=-2$.

又如，求$\log_2 4^{2.5}$的值，也就是求$4^{2.5}$等于2的几次幂．因为$4^{2.5}=(2^2)^{2.5}=2^5$，所以$\log_2 4^{2.5}=5$.

有了对数记号后，就容易把一个数N表示为另一个数a的幂．设

$$N=a^x,$$

根据对数的定义有

$$x=\log_a N,$$

所以

$$N=a^{\log_a N}. \tag{3}$$

它表明，把N表示为以a为底的幂时，指数恰好是$\log_a N$.

例如，将27，81各表示为5的幂的形式，就是

$$27=5^{\log_5 27},\quad 81=5^{\log_5 81}.$$

恩格斯指出：**“任何一个数都可以理解为和表示为其他任何一个数的幂（对数，$y=a^x$）。而这种从一个形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算。”**①

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第236页。

二、对数的性质及其运算规则

对数式和指数式是可以相互转化的，因此可以利用幂的性质和运算规则去推导对数的基本性质和运算规则.

性质 1 1的对数为零.

因为 $a^0=1$, 所以 $\log_a 1=0$.

性质 2 底的对数为1.

因为 $a^1=a$, 所以 $\log_a a=1$.

性质 3 当底数大于1时，真数愈大对数也愈大.

在指数式 $N=a^x$ 中固定 a $(a>1)$，显然，N 愈大，x 也愈大；用对数记号表达，就是 N 愈大，$\log_a N$ 也愈大.

在第一节，我们已经知道同底的幂有下列运算规则：

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (a>0);$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a>0);$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (a>0).$$

根据这些规则，我们可以导出计算积、商、幂的对数的规则.

先讨论积的对数.

设 $M=a^x, N=a^y$，则 $\log_a M=x, \log_a N=y$. 另一方面，

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

所以

$$\log_a(M \cdot N) = x+y = \log_a M + \log_a N.$$

由此得到：

规则 1 两个正数的积的对数等于这两个数的对数的和.

再讨论商的对数.

设 $M=a^x$, $N=a^y$，则 $\log_a M=x$, $\log_a N=y$. 另一方面，

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

所以

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

由此得到:

规则 2 两个正数的商的对数等于被除数的对数减去除数的对数.

最后讨论幂的对数.

设 $M=a^x$, 则 $\log_a M=x$; 另一方面,

$$M^y=(a^x)^y=a^{yx},$$

所以

$$\log_a(M^y)=yx=y\log_a M.$$

由此得到:

规则 3 一个正数的幂的对数等于这个正数的对数乘以指数.

[例 3] 已知 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, 求 $\log_{10}12$, $\log_{10}1.5$, $\log_{10}\sqrt{6}$ 的值.

解:
$$\begin{aligned}\log_{10}12&=\log_{10}(2^2\times3)=\log_{10}(2^2)+\log_{10}3\\&=2\log_{10}2+\log_{10}3=2\times0.3010+0.4771\\&=1.0791;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}1.5&=\log_{10}\frac{3}{2}=\log_{10}3-\log_{10}2\\&=0.4771-0.3010=0.1761;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10}\sqrt{6}&=\log_{10}6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}(3\times2)\\&=\frac{1}{2}(\log_{10}3+\log_{10}2)\\&=\frac{1}{2}(0.4771+0.3010)=0.3891.\end{aligned}$$

[例 4]　计算 $\log_6\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_6 3$.

解：
$$\log_6\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_6 3=\frac{1}{2}\log_6 2+\frac{1}{2}\log_6 3$$
$$=\frac{1}{2}\log_6(2\times 3)=\frac{1}{2}\log_6 6$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

[例 5]　已知 $\log_a x=\log_a m+\frac{1}{2}\log_a n-\frac{2}{3}\log_a(m+n)$，求 x.

解：
$$\log_a x=\log_a m+\frac{1}{2}\log_a n-\frac{2}{3}\log_a(m+n)$$
$$=\log_a m+\log_a\sqrt{n}-\log_a\sqrt[3]{(m+n)^2}$$
$$=\log_a\frac{m\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[3]{(m+n)^2}}.$$

因为两个底数相同的对数相等，就意味着它们的真数必等，所以 $x=\frac{m\sqrt{n}}{\sqrt[3]{(m+n)^2}}$.

[例 6]　解方程 $\log_2\sqrt{x}+\log_2\sqrt{5-x}=1$.

解：
$$\log_2\sqrt{x}+\log_2\sqrt{5-x}=\frac{1}{2}[\log_2 x+\log_2(5-x)]$$
$$=\frac{1}{2}\log_2 x(5-x),$$

所以原方程化为
$$\frac{1}{2}\log_2 x(5-x)=1,$$

即
$$\log_2 x(5-x)=2.$$

按对数的意义有
$$x(5-x)=2^2,$$

整理得

$$x^2-5x+4=0.$$

解这个方程得

$$x_1=1, \quad x_2=4.$$

[例 7] 解方程组

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-x-2}}=4y, & (1) \\ \log_{10}(1+y)=2\log_{10}y+\log_{10}2. & (2) \end{cases}$$

解：由(2)得

$$\log_{10}(1+y)=\log_{10}2y^2,$$

由两边的真数相等，得

$$1+y=2y^2,$$

解得

$$y=1, \quad y=-\frac{1}{2}.$$

用 $y=-\frac{1}{2}$ 代入(2)，右端第一项真数 N 成为负数，而负数没有对数，因此 $y=-\frac{1}{2}$ 不是解.

将 $y=1$ 代入(1)得

$$2^{\sqrt{x^2-x-2}}=2^2,$$

因为同底数的幂相等，它们的指数必等，所以

$$\sqrt{x^2-x-2}=2,$$

两边平方并整理得

$$x^2-x-6=0,$$

即

$$(x-3)(x+2)=0,$$

所以

$$x_1=3, \quad x_2=-2.$$

经验根后，知原方程组的解是

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

小　　结

1．设 $a^x=N\ (a\neq1,\ a>0)$，x 叫做以 a 为底的 N 的对数，记为 $x=\log_a N$，N 叫真数．

对数式 $x=\log_a N$ 中的对数 x，就是指数式 $N=a^x$ 中的指数 x．

2．任何一个正数 N，可以表示为另一个正数 a 的幂，其形式为

$$N=a^{\log_a N}.$$

3．对数的性质

(1) 1 的对数为零；

(2) 底的对数为 1；

(3) 当底数大于 1 时，真数愈大对数也愈大．

4．对数的运算法则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a(M^y)=y\log_a M$．

习　　题

1．把下列指数式写成对数式：

$4^5=1024$；　　$10^3=1000$；　　$10^{-3}=0.001$；

$27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$；　　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$；　　$y=3^x$．

2．把下列对数式写成指数式：

$\log_3 81=4$；　　$\log_2\frac{1}{8}=-3$；　　$\log_{\frac{1}{2}} x=y$；

$\log_{10}0.01=-2$；　　$\log_{10}ab=c$．

3. 根据对数的概念求下列等式中的未知数 x:

$x=\log_6 36$; $x=\log_{36} 6$; $\log_3 x=2$;

$\log_5 x=0$; $\log_8 x=-2$; $\log_x 2=-0.5$.

4. 计算下列各式的值:

(1) $3^{\log_3 9}$, $3^{5\log_3 2}$, $3^{1-\log_3 7}$;

(2) $\log_{36} 6-\log_6 36+\log_6 \frac{1}{36}-\log_{36} \frac{1}{6}$;

(3) $\log_a \sqrt[n]{a}+\log_a \frac{1}{a^n}+\log_a \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

5. 下列等式对不对？为什么？

(1) $\log_a 20+\log_a 40=\log_a 60$; (2) $\log_a 100-\log_a 10=\log_a 10$;

(3) $(\log_a x)^2=\log_a x^2$; (4) $\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\log_2 6-\log_2 3$;

(5) $\log_{10}(a-b)=\log_{10} a-\log_{10} b$.

6. (1) 求对数 $\log_{10} 1$, $\log_{10} 10$, $\log_{10} 100$, $\log_{10} 1000$ 的值;

(2) 求对数 $\log_{10} 0.1$, $\log_{10} 0.01$, $\log_{10} 0.001$, $\log_{10} 0.0001$ 的值;

(3) 总结规律,并写出 $\log_{10} 1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}0}$ 与 $\log_{10} 0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}1$ 的值.

7. 已知 $\log_{10} 2=0.3010$, $\log_{10} 3=0.4771$, 求下列各对数:

$\log_{10} 2000$; $\log_{10} 30000$; $\log_{10} 0.02$; $\log_{10} 0.0003$;

$\log_{10} 40$; $\log_{10} 1.8$; $\log_{10} 12$.

8. 解下列各方程(x, y 为未知数):

(1) $\log_{10} x=\log_{10} 5-\log_{10} 2+\log_{10} 3$;

(2) $\log_a x+\log_a b=c$;

(3) $\log_{10} x=3\log_{10}(a+b)-2\log_{10}(a-b)$;

(4) $\log_{10} y-\frac{1}{3}\log_{10} a=b$;

(5) $2\log_{10} x-\log_{10} 2-\log_{10}(8-3x)=0$.

9. 某容器的容积是 V 立方厘米,容器里空气的压强是 p_1 公斤/厘米^2; 抽气机每秒钟从容器里抽出 A 立方厘米的空气, 经过 t 秒钟,容器里空气的压强降为 p_2 公斤/厘米^2. 这几个量之间的关系是

$$\log_{2.718} p_2=-\frac{A}{V}\cdot t+\log_{2.718} p_1.$$

求证

$$t=\log_{2.718}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{V}{A}}.$$

第三节　常用对数

一、首数和尾数

我们常用的计数制是十进位制，因此用 10 做底数有它方便的地方．用 10 做底数的对数叫做常用对数．为了简便，通常把底数 10 省略不写，并把“log”记成“lg”．例如，$\log_{10}N$ 记成 $\lg N$．

对于常用对数，除了上节所讲的一般性质和运算规则都成立外，还有它的特殊性质．

我们知道

$$\lg 1000=\lg 10^3=3,$$

$$\lg 0.0001=\lg 10^{-4}=-4,$$

一般地

$$\lg 10^n=n\lg 10=n \quad (n\text{ 为整数}).$$

这就是说，10 的整数次幂的常用对数是一个整数，它等于这个幂的指数．

下面我们进一步研究 10 的整数次幂以外的正数的对数．

首先，我们研究介于 1 与 10 之间的数 A 的对数．

因为 $1<A<10$，根据第二节中性质 3，就有

$$\lg 1<\lg A<\lg 10,$$

即

$$0<\lg A<1.$$

这就是说，介于 1 与 10 之间的数的对数是一个正的纯小数（介于 0 与 1 之间的小数叫做正的纯小数）．

任意正数 N 都可以写成

$$N=A\times10^{n}\quad(1\leqslant A<10,\ n\ \text{为整数})$$

的形式，于是

$$\lg N=\lg(A\times10^{n})=\lg10^{n}+\lg A=n+\lg A.$$

这就是说，对数 $\lg N$ 是两个数 n 与 $\lg A$ 之和，其中 n 为整数，称为对数 $\lg N$ 的首数；$\lg A$ 是正的纯小数或零，称为对数 $\lg N$ 的尾数.

例如

$$\lg579.2=\lg(5.792\times10^{2})=\lg10^{2}+\lg5.792$$
$$=2+\lg5.792;$$
$$\lg57.92=\lg(5.792\times10)=\lg10+\lg5.792$$
$$=1+\lg5.792;$$
$$\lg5.792=\lg(5.792\times10^{0})=\lg10^{0}+\lg5.792$$
$$=0+\lg5.792;$$
$$\lg0.5792=\lg(5.792\times10^{-1})=\lg10^{-1}+\lg5.792$$
$$=-1+\lg5.792;$$
$$\lg0.05792=\lg(5.792\times10^{-2})=\lg10^{-2}+\lg5.792$$
$$=-2+\lg5.792.$$

比较上面这些式子，可以看出，象 579.2，……，0.5792，0.05792 这些只是小数点位置不同的数，它们的对数尾数都相同，只有首数不同.

因此，我们只要制作 1 到 10 之间各数的对数表，就可以求得所有正数的对数了．而要求一个正数的常用对数，关键在于定首数与查尾数，现在分别介绍如下.

1．定首数

上面例子表明：$\lg579.2$ 的首数是 2，$\lg57.92$ 的首数是 1，$\lg0.5792$ 的首数是 -1，$\lg0.05792$ 的首数是 -2，比

较它们的首数，我们就可以看出确定首数的规律如下：

当真数大于1时，它的对数的首数等于真数的整数部分的位数减1．例如7210.4，它有4位整数，所以，它的对数的首数是3．

当真数小于1时，它的对数的首数是一个负整数，首数的绝对值等于这个真数左边第一个非零数字前面零的个数（包括小数点前面的一个零）．例如0.0072104，在第一个不为零的数7之前，有3个“0”，所以它的首数是 −3．

2．查尾数

可查《常用对数表》，这种表只列出对数的尾数，不包括首数．

二、常用对数表

［例1］ 求 $\lg 57.9$．

解：因为57.9的整数部分是二位数，所以 $\lg 57.9$ 的首数是 $2-1=1$．查表得尾数0.7627，所以 $\lg 57.9=1.7627$．

［例2］ 求 $\lg 0.008261$．

解：因为0.008261的第一个非零数字是8，它前面有三个零，所以 $\lg 0.008261$ 的首数是 −3．查表得尾数0.9171，所以

$$\lg 0.008261=-3+0.9171=-2.0829.$$

作为计算的中间步骤，有时把这种首数为负的对数记为

$$\lg 0.008261=-3+0.9171=\bar{3}.9171,$$

即不把负的首数与正的尾数相加，而以小数点来分开首数和尾数．

［例3］ 求 $\lg 0.04851+\lg 0.9216$．

解：$\lg 0.04851+\lg 0.9216$

$$=\bar{2}.6858+\bar{1}.9646$$

$$=(-2-1)+(0.6858+0.9646)$$

$$=-3+1.6504$$

$$=-1.3496.$$

注意：首数和尾数可分别相加后再合并.

[例 4]　求 $4\lg 0.5084$.

解：$4\lg 0.5084=4\times\bar{1}.7062=4(-1+0.7062)$

$$=-4+2.8248=-1.1752.$$

注意：首数和尾数可分别先乘以某数后再合并.

[例 5]　求 $\frac{1}{2}\lg 0.007845$.

解：$\frac{1}{2}\lg 0.007845=\frac{1}{2}\times\bar{3}.8946=\frac{1}{2}(-3+0.8946)$

$$=\frac{1}{2}(-4+1.8946)$$

$$=-2+0.9473=-1.0527.$$

注意：对于首数为负的对数，在首数与尾数分开写的时候，如果要除以某数而这个首数不能被某数整除，那末就要把这个首数先化成一个能被某数整除的负数与一个正数的和的形式，把添加的正数并到尾数中去（如上例的首数 -3 不能被 2 整除，则将 -3 化成 $-4+1$，而将 $+1$ 并到尾数中去），然后再分别除以某数.

我们学会了求一个数的常用对数．在实际应用中，还会遇到相反的问题，即从对数求真数的问题．例如，已知 $\lg N=0.003$，求 N．这可由«对数表»反查出来，但不方便，所以专门编制了一种«反对数表»，从中可由已知的对数查出对应的真数．这种表和«常用对数表»一样，查出的真数的位数要另

行确定．所以，从已知对数查真数，在一般情况下，也要分成两步做，先根据对数的尾数，查«反对数表»，求出真数的四位有效数字；第二步，根据对数的首数来确定真数里小数点的位置．

［例 6］ 已知 $\lg N=0.003$，求 N．

解：由尾数 0.003 查«反对数表»得 1007．由于 $\lg N$ 的首数为 0，而真数的整数部分位数应当由首数加 1 来确定，所以得到的真数有一位整数．即

$$N=1.007.$$

［例 7］ 已知 $\lg N=\bar{3}.9171$，求 N．

解：由尾数 0.9171 查«反对数表»，得 8262，因为首数 -3 是负数，所以在真数左边第一个非零数前有三个零，即

$$N=0.008262.$$

从这个例子可以看出，把负的首数与正的尾数分开写，在计算中有它方便的地方．

［例 8］ 已知 $\lg N=-1.4261$，求 N．

解：由于尾数 -0.4261 是负数，不能直接查表，因此先要把 $\lg N$ 化成以下形式：

$$\begin{aligned}\lg N&=-1.4261=(-1-0.4261)\\&=(-1-1)+(1-0.4261)\\&=-2+0.5739=\bar{2}.5739.\end{aligned}$$

由尾数 0.5739 查«反对数表»得 3749，因为首数是 -2，所以

$$N=0.03749.$$

在工程技术中，常遇到复杂的计算，对数是简化计算的有力工具．对于较复杂的计算，可根据对数的运算法则，先把它转化成对数运算，然后通过查«反对数表»，得出计算的结果．

真　　数	对　　数	运算的转化
$M\cdot N$	$\lg M+\lg N$	乘 ⇒ 加
$\frac{M}{N}$	$\lg M-\lg N$	除 ⇒ 减
M^y	$y\cdot\lg M$	求幂(乘方、开方) ⇒ 乘

[例 9]　计算：(1) $10^{2.25}$；(2) $(3.02)^{0.65}$.

解：(1) 设 $N=10^{2.25}$，得

$$\lg N=2.25.$$

查《反对数表》，得

$$N=177.8.$$

(2) 设 $N=(3.02)^{0.65}$，得

$$\lg N=0.65\lg 3.02=0.65\times 0.48=0.3120,$$

查《反对数表》，得

$$N=2.051.$$

从上例可知，有了对数表，幂的计算问题也就解决了.

三、利用对数进行计算

[例 10]　计算 $\frac{6.35}{0.0137}$.

解：设

$$N=\frac{6.35}{0.0137},$$

两边取对数，得

$$\lg N=\lg\frac{6.35}{0.0137}=\lg 6.35-\lg 0.0137$$

$$=0.8028-\bar{2}.1367$$

$$=0.8028-(-2+0.1367)=2.6661,$$

查《反对数表》，得

$$N=463.5.$$

[例 11] 计算

$$N=\frac{(21021)^{0.64}\times(13.49)^3}{474.2}.$$

解：$\lg N=0.64\lg 21021+3\lg 13.49-\lg 474.2$

$$=0.64\times 4.3226+3\times 1.1300-2.6760$$

$$=2.7665+3.3900-2.6760=3.4805,$$

查《反对数表》，得

$$N=3024.$$

[例 12] 计 算 $N=1.25\times\sqrt[3]{-0.0239}$.

解：因为 $N=1.25\times\sqrt[3]{-0.0239}=-(1.25\times\sqrt[3]{0.0239})$ 是一个负数，而负数没有对数，所以设

$$M=1.25\times\sqrt[3]{0.0239},$$

于是

$$\lg M=\lg 1.25+\frac{1}{3}\lg 0.0239=0.0969+\frac{1}{3}(-2+0.3784)$$

$$=0.0969+\frac{1}{3}(-3+1.3784)=0.0969-1+0.4595$$

$$=\bar{1}.5564,$$

查《反对数表》，得 $M=0.36$，所以

$$N=-0.36.$$

[例 13] 求 $N=\sqrt[4]{\sqrt[4]{17}-\sqrt{3.1}}$ 的值.

解：这例根号内有两项，不能直接应用对数运算法则，所以分两步进行计算. 我们先设

$$N_1=\sqrt[4]{17},\quad N_2=\sqrt{3.1},$$

于是

$$\lg N_1=\frac{1}{4}\lg 17=\frac{1}{4}\times 1.2304=0.3076,$$

$$\lg N_2=\frac{1}{2}\lg 3.1=\frac{1}{2}\times 0.4914=0.2457,$$

查《反对数表》，得

$$N_1=2.031,\quad N_2=1.761,$$

所以

$$N_1-N_2=2.031-1.761=0.27,$$

从而

$$N=\sqrt[4]{0.27}.$$

再取对数，得

$$\begin{aligned}\lg N&=\frac{1}{4}\lg 0.27=\frac{1}{4}\times\bar{1}.4314\\&=\frac{1}{4}(-4+3.4314)\\&=-1+0.8579\\&=\bar{1}.8579,\end{aligned}$$

查《反对数表》，得

$$N=0.7209.$$

[例14] 计算我国第一颗人造地球卫星运转周期 τ 的公式是

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}\ (\text{秒}),$$

其中，地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2，人造卫星的近地点 $h_1=439$ 公里，远地点 $h_2=2384$ 公里，求 τ.

解：
$$\begin{aligned}\lg\tau&=\lg\left[2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\&=\lg\left[2\times3.14\times\sqrt{\frac{6371\times10^3}{9.8}}\times(1.22)^{\frac{3}{2}}\right]\\&=\lg 6.28+\frac{1}{2}[\lg 6371-\lg 9.8+\lg 10^3]+\frac{3}{2}\lg 1.22\\&=0.7980+\frac{1}{2}[3.8042-0.9912+3]+\frac{3}{2}\times0.0864\\&=0.7980+2.9065+0.1296=3.8341,\end{aligned}$$

查《反对数表》，得

$$\tau=6825\text{ 秒}=113\text{ 分 }45\text{ 秒}.$$

小　　结

1．常用对数 $\lg N$ 是以 10 为底的对数.

2．已知 N 求 $\lg N$ 的步骤：

(1) 定首数：当 $N>1$ 时，首数等于 N 的整数部分位数减 1；当 $N<1$ 时，首数为负整数，其绝对值等于 N 的第一个非零数字前零的个数.

(2) 查尾数：以 N 查《常用对数表》所得的正的纯小数或零.

(3) 写出对数：$\lg N=$ 首数 $+$ 尾数.

3．已知 $\lg N$ 求 N 的步骤：

(1) 分清 $\lg N$ 的首数和尾数；

(2) 以尾数查《反对数表》得 N 的四位有效数字；

(3) 以首数确定 N 中小数点的位置.

习　　题

1．求下列各数的常用对数：

2.345；　23.45；　234.5；　0.002345；

0.576；　4.32；　37.512；　0.39978.

2．已知 $\lg x$ 为下列各值，求真数 x 的值：

5.743；　2.743；　0.743；　$\bar{1}.743$；

3.2183；　-1.567；　-0.3457；　-3.1563.

3．利用对数计算下列各值：

(1) $3.548\times0.438\times0.0167$；　(2) $0.0674\times1.23\times34.79\div3.51$；

(3) $\dfrac{1.58\times52.43}{13.42}$；　(4) $\dfrac{(4.38)^{1.4}\times(5.46)^{0.7}}{(0.054)^{2.8}}$；

(5) $\sqrt[8]{(1.34)^2}$；　(6) $0.07309^{-1.532}$；

(7) $(-2.31)^3\times\sqrt[5]{72}$;　　(8) $\sqrt[5]{5+\sqrt[3]{5}}$.

4. 自由落体公式是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，求 $t=6.5$ 秒时物体所落下的距离（$g=9.8$ 米/秒^2）.

5. 用单摆的振动周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求摆长 l 是 1.2 米时的振动周期（$g=9.8$ 米/秒^2）.

6. 已知月球到地球的距离 R 是 384400 公里，旋转周期 T 是 27 昼夜 7 小时 43 分（约 2360580 秒），求月球的向心加速度 $a\left(a=\frac{4\pi^2R}{T^2}\right)$.

7. 已知地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒$^2=9.8\times10^{-3}$ 公里/秒^2，试计算第一宇宙速度 $v_1=\sqrt{gR}$，和第二宇宙速度 $v_2=\sqrt{2gR}$.

8. 某造纸厂今年生产纸张 9830 吨，计划以后每年比上一年增产 21.5%，试按照这样的计划，计算今后第四年的产量将是多少吨？

第四节　对数的换底公式

在生产实践和科学技术研究中，除了经常使用常用对数外，还会遇到以其它正数为底的对数.

一、换底公式

[例 1]　求解第二节例 1（第 188 页）中所提出的问题，即求满足 $1.2^x=2.5$ 的 x 值.

解：在

$$1.2^x=2.5$$

两边取常用对数，得

$$x\lg1.2=\lg2.5,$$

所以

$$x=\frac{\lg2.5}{\lg1.2}=\frac{0.3975}{0.0792}\approx5.$$

这就是说，大约5年后，年产量可达5000吨.

根据对数的定义，$1.2^x=2.5$ 可以写作 $x=\log_{1.2}2.5$，即以1.2为底的对数．比较上面所得的结果，可知

$$\log_{1.2}2.5=\frac{\lg 2.5}{\lg 1.2}.$$

上式告诉我们，以1.2为底的对数可以表示为常用对数的商.

下面，我们证明一般的换底公式

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{1}$$

证：设

$$x=\log_a N,$$

那末

$$a^x=N,$$

两边取以 b 为底的对数，得

$$x\log_b a=\log_b N,$$

所以

$$x=\frac{\log_b N}{\log_b a},$$

从而得到换底公式(1).

在(1)式中令 $b=10$，则换底公式变为

$$\log_a N=\frac{\lg N}{\lg a}, \tag{2}$$

这说明以任何正数 a 为底的对数可化为常用对数来计算.

［例2］ 某公社计划水稻每年增产11%，问多少年后，可以使产量提高一倍？

解：把现在年产量记为 a，设 x 年后可以达到 $2a$，于是 x 满足方程

$$a(1+11\%)^x=2a,$$

所以

$$1.11^x=2,$$

即

$$x=\log_{1.11}2.$$

由换底公式得

$$x=\log_{1.11}2=\frac{\lg 2}{\lg 1.11}=\frac{0.3010}{0.0453}.$$

两边再取常用对数，得

$$\lg x=\lg\frac{0.3010}{0.0453}=\lg 0.3010-\lg 0.0453$$
$$=\bar{1}.4786-\bar{2}.6561=0.8225.$$

查«反对数表»，得

$$x=6.645.$$

所以，约七年后产量可提高一倍.

二、自然对数

在高等数学和工程技术中还广泛使用着一种以 e 为底的对数($e=2.71828\cdots$).为什么要用这么复杂的数做底呢?那是因为很多自然规律需要用以 e 为底的指数式来表示. 如前面讲到的电容器放电时，端电压 u 与时间 t 的关系是 $u=u_0e^{-kt}$. 又如大气压力 p 与高度 h 的关系是 $p=p_0e^{-kh}$, 其中 p_0 是 $h=0$ 处的大气压，k 是正的常数. 以 e 为底的对数叫做自然对数. 通常把"$\log_e N$"记作"$\ln N$". 自然对数的性质和运算规则与一般对数完全一样，其中，关于自然对数的恒等式 $\beta=e^{\ln\beta}$ 在高等数学中经常用到.

求自然对数可以查«自然对数表»，也可以利用换底公式来计算.自然对数与常用对数的关系是

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}.$$

因为

$$\frac{1}{\lg e}=\frac{1}{0.4343}=2.303,$$

所以

$$\ln N=2.303\lg N.$$

[例 3] 求第二节例子中满足 $e^t=20$ 的 t 值.

解: $t=\ln 20=\dfrac{\lg 20}{\lg e}=1.3010\times 2.303=2.996.$

所以，电压 u 降到原电压的 5%，约需 3 秒钟.

[例 4] 把 2 写成 e 的幂.

解: 利用恒等式 $2=e^{\ln 2}$，我们下面只要计算 $\ln 2$.

$$\ln 2=2.303\lg 2=0.3010\times 2.303=0.6932,$$

故得

$$2=e^{0.6932}.$$

[例 5] 把 10^n 写成 e 的幂.

解: 因 $10^n=e^{\ln 10^n}=e^{n\ln 10}$，又

$$\ln 10=2.303\lg 10=2.303,$$

所以

$$10^n=e^{2.303n}.$$

[例 6] 解对数方程

$$\ln\frac{x}{e}=2-5\ln x.$$

解: 因为

$$\ln\frac{x}{e}=\ln x-\ln e=\ln x-1,$$

所以有

$$\ln x-1=2-5\ln x,$$

移项得

$$6\ln x=3 \quad 或 \quad \ln x=\frac{1}{2},$$

于是

$$x=e^{\frac{1}{2}}.$$

小　结

1．对数的换底公式

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

2．$\log_a N$ 可用常用对数表示为

$$\log_a N=\frac{\lg N}{\lg a}.$$

3．以 e 为底的对数叫做自然对数．自然对数可用常用对数表示为

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}=2.303\lg N.$$

习　题

1．用换底公式计算：

(1) $\log_2 2.718$；　(2) $\log_5 28$；

(3) $\log_{1.8} 1.643$；　(4) $\log_{3.3} 2.881$.

2．解下列方程：

(1) $e^x=1.667$；　(2) $0.5^x=0.1$；

(3) $e^{x(x-1)}=4^{x+2}$；　(4) $e^{-x}=0.5$；

(5) $(0.2)^x=50.7\times(0.5)^{1-x}$.

3．用换底公式计算：

(1) $\ln 22030$；　(2) $\ln 7.39$；

(3) $\ln 8$；　(4) $\ln 0.5029$；

(5) $\ln 1000$；　(6) $\ln 0.001$.

4．解下列方程：

(1) $\ln x=\ln a+\ln b$；　(2) $\ln x=3\ln a+\frac{1}{2}\ln b$；

(3) $\ln x-\ln a=c$；　(4) $\ln x+\ln(2e-x)=2$.

5. 已知 $\ln 1.3=0.26236$, $\ln 2=0.69315$, $\ln 10=2.30259$. 把下列各数化为 e 的幂:

$13^{2.5}$;　　$130^{1.1}$;　　$260^{-0.6}$;　　0.26;　　52.

6. 某原始森林探测结果，知其可采伐的木材共 50 万立方米，而该森林可采伐木材每年平均增长率为 8%，试估算多少年后，可以采伐 80 万立方米的木材.

复　习　题

1. 计算下列各式:

(1) $(m^2-m^{-1})(m+1+m^{-2})$;

(2) $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\div\left(-\frac{4}{3}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)$;

(3) $(a^{-2}+b^{-1})^3$;

(4) $2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\cdot(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$;

(5) $\left(\frac{e^3+e^{-3}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^3-e^{-3}}{2}\right)^2$;

(6) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$;

(7) $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$.

2. 通过对水的分析，发现 18 克水中含有 6.02×10^{23} 个水分子，求 1 个水分子的重量.

3. 自制小型变压器，如果铁心的截面积为 a 厘米^2，那末每伏电压绕线匝数 N 由下式计算:

$$N=\frac{4.5\times10^5}{9\times10^3\times a}.$$

现在铁心的截面积为 5.4 厘米^2，要作 20 伏的变压器，问需绕线多少匝?

4. 一个二极电子管的电流 I (安培) 和电压 V (伏特) 的关系是

$$I=0.57\times10^{-3}\times V^{\frac{3}{2}}.$$

如果 $V=12$ 伏特，求 I.

5. 将下列公式变形:

(1) 已知 $V=\frac{4}{3}R^3$，求 R.

(2) 已知 $\frac{H}{A}=\frac{b^2}{(H\cdot V^3)^{\frac{3}{2}}}$，求 V.

(3) 已知 $V=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}J^{\frac{1}{2}}$，求 R.

6. 计算下列各式:

(1) $\frac{1}{3}\log_3 27$; (2) $\lg\sqrt{10}+\frac{1}{2}$;

(3) $\lg(a+b)+\lg(a-b)-\lg(a^2-b^2)$;

(4) $\frac{1}{2}\lg a^2b^4+\lg\frac{1}{a}+3\lg\frac{1}{b}+2\lg\sqrt{b}$.

7. 求证下列各式:

(1) $\log_a ab=1+\log_a b$; (2) $\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b$;

(3) $\log_a(n^2+n+1)+\log_a(n-1)=\log_a(n^3-1)$;

(4) $\log_a(m^3+3m^2+3m+1)-\log_a(n^3+3n^2+3n+1)=3\log_a\frac{m+1}{n+1}$;

(5) $\log_a(e^s+2+e^{-s})+\log_a(e^s-2+e^{-s})=2\log_a(e^s-e^{-s})$;

(6) $\log_a(x+\sqrt{x^2-1})=-\log_a(x-\sqrt{x^2-1})$.

8. 利用对数计算下列各式的值:

(1) $(-48.2)^2\times(-3.4)^3\times\sqrt[3]{88.92}$;

(2) $\frac{\sqrt[3]{0.8216}\times(0.04826)^4}{(0.005127)^3\times\sqrt{7.246}}$; (3) $\frac{30.48}{53.34\times 2.8}+\frac{\sqrt[3]{82.1}}{5.14}$;

(4) $\frac{3.89^{-2}\times\sqrt[3]{-0.1536}}{0.924^2}$.

9. 在 RC (R 是电阻, C 是电容) 串联电路中, 当按上电压为 E 的直流电源, 电容 C 便进行充电, 其充电规律为

$$U=E(1-e^{-\frac{t}{RC}}),$$

其中 U 是电容 C 上的电压, t 是充电时间, RC 是时间常数, 问经过多少时间 U 达到 $0.9E$?

10. 在不考虑空气阻力的条件下, 火箭的最大速度 v (米/秒) 和燃料的质量 m_1 (公斤)、火箭 (除燃料外) 的质量 m_2 (公斤) 的关系是

$$v=2000\ln\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right).$$

当燃料质量是火箭质量的多少倍时，火箭的速度能够达到 8000 米/秒?

11. 把船的缆绳在铁桩上绕几圈后，只要用很小的力就可以拉住一艘很重的船．船作用于缆绳的力 F（公斤）和拉力 P（公斤）以及缆绳所绕的圈数 n 的关系是

$$F=Pe^{\frac{2\pi n}{3}}.$$

如果船作用于缆绳上的力是 4 吨，要用 10 公斤的力拉住船，缆绳至少须在铁桩上绕几圈?

第五章　三　角　比

我们已经学会用三角比进行三角形的边角计算．但是孤立地讨论三角形的边角关系，对于许多实际问题还是不够的．在这一章里，我们将把三角形与圆周运动联系起来考察，把角的概念加以扩充，得出一般角的三角比．

第一节　平面直角坐标系　角的概念的推广

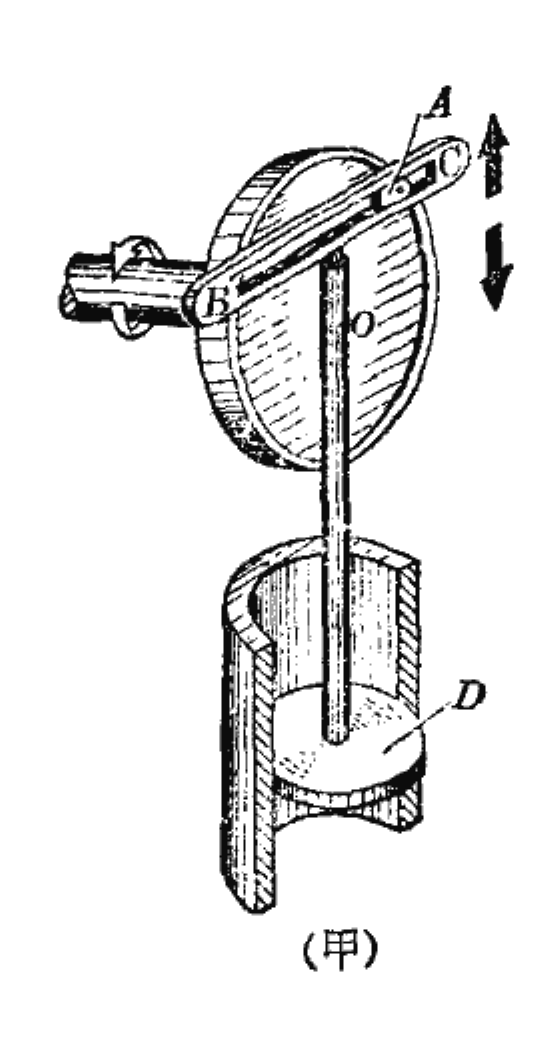
先分析一个物理模型——偏心驱动的数量关系．

在机械结构中，常常需要把圆周运动转化为直线的往复运动，偏心驱动是实现这种转化的一种机械装置，图 5-1 是这种装置的示意图．

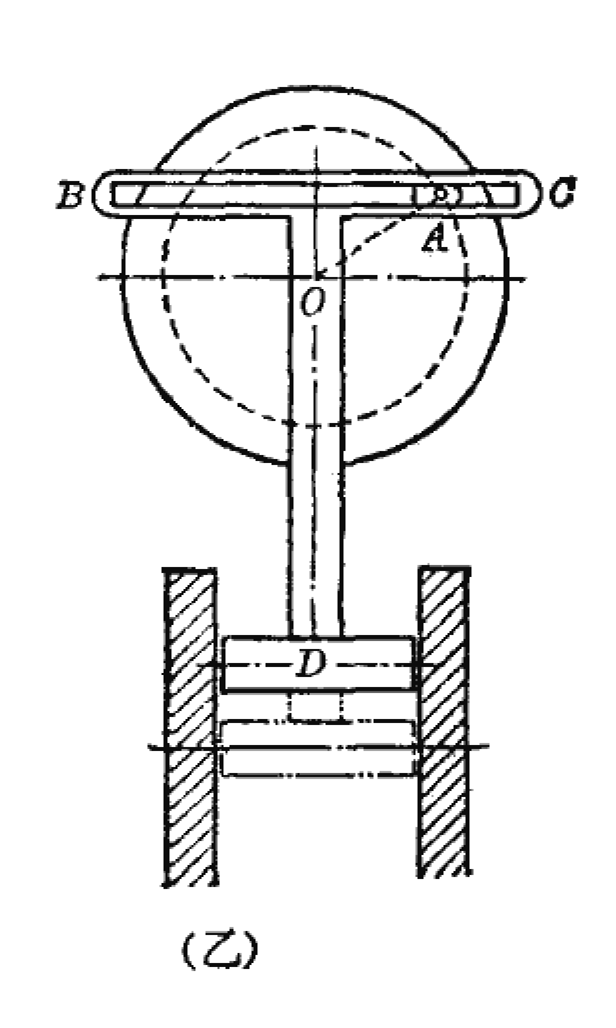
圆盘上装有一个固定的滑块 A，它可以在滑槽 BC 中滑动，滑槽 BC 和活塞 D 连接在一起．圆盘绕盘心 O 转动，滑块跟着作圆周运动．由于滑块的带动，滑槽作上下往复运动，于是活塞 D 也跟着作上下往复运动．活塞与滑槽的运动规律是一致的．

分析这个装置我们发现，圆盘的转角决定了滑块在转动中的位置，而滑块的位置又决定了在上下往复运动中滑槽的位置，所以圆盘的转角决定了滑槽的位置．我们的目的正是要探求圆盘转角与滑槽位置的关系．

为了探求这一关系，我们用两根互相垂直的直线 Ox 与



(甲)



(乙)

图 5-1

Oy 作为基准线，考察这二根直线所决定的平面上一点 A 绕 O 点的圆周运动（图 5-2）. 当 A 在圆周上运动时，它在 Oy 上的垂足 D 跟着作上下往复运动. A 点的转角 α（即 OA 与 Ox 的夹角）的大小决定了 A 点在圆周上的位置，也就决定了 A 在直线 Oy 上的垂足 D 的位置. 因此问题转化为描述 α 的大小与 D 的位置的依存关系.

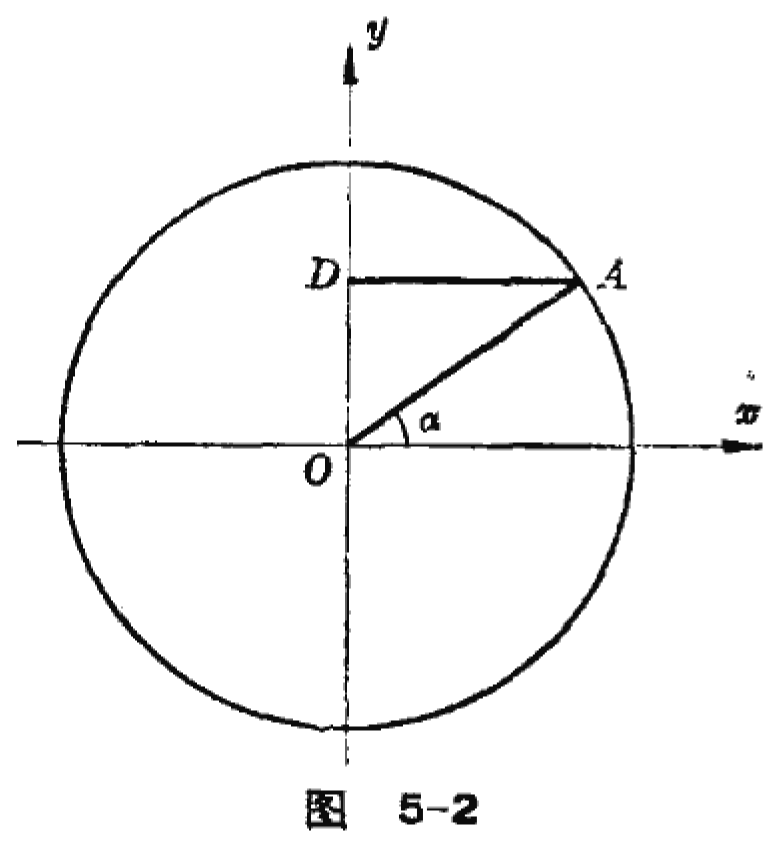


图 5-2

这里，问题的实质也是边角关系，但较之我们所熟识的那种边角计算问题要深刻得多了.

第一，这里的转动可以是顺转也可以是逆转，可以转过一个锐角，也可以转过一个直角，甚至一个或几个周角，因此第一个问题是如何用数字来表示转动中的角.

第二，这里要讨论的是平面上点的位置，因此第二个问题是如何用数字来表示平面上点的位置.

这两个问题的解决是揭示偏心驱动的数量关系的必要前提.

一、平面直角坐标系

坐标方法是一种定位方法. 我们已经知道，规定了原点、方向和单位长度的直线成为一根数轴. 在数轴上每一点可以用一个数来表示，那末平面上的点如何表示呢？我们举一个例子，从中将得到启发. 譬如参加一次会议，入场券上指定的座位是12排15座，12与15这两个数就准确无误地指明了座位的位置. 概括地说，平面上点的位置可以用两个有顺序的数来表示，直角坐标就是其中的一种表示方法.

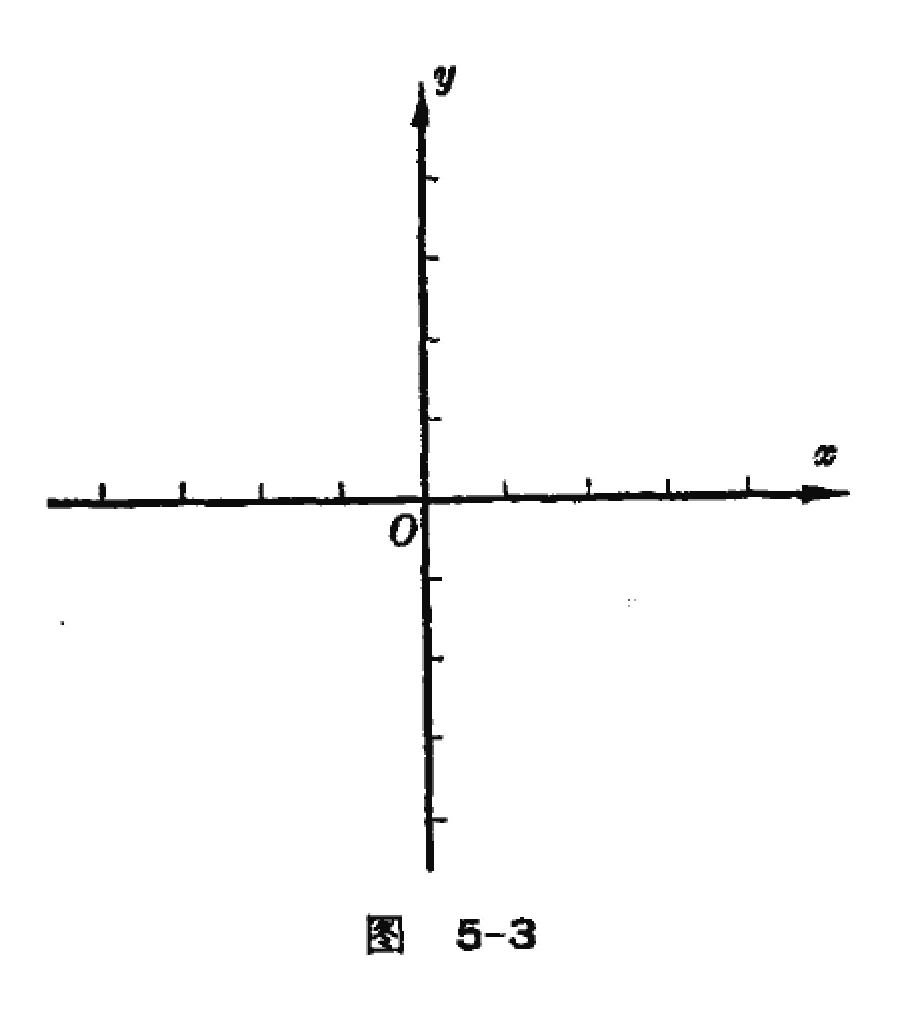


图 5-3

在平面上引进两根互相垂直的数轴，相交于它们的原点，通常，一根横放从左到右是正向，另一根竖放从下到上是正向（图5-3），这样，我们就说，在这个平面上引进了一个直角坐标系，而这个平面就称为坐标平面，交点称为坐标原点，横放的轴称为横轴，记为 x 轴，竖放的轴称为纵轴，记为 y 轴.

我们将看到，在坐标平面上的每一个点都有一个数对与之对应.

例如，我们考察点 M（图 5-4）. 过 M 作坐标轴的垂线，得到两个垂足 M_x 与 M_y. 在 x 轴上，M_x 与 4 对应，在 y 轴上，M_y 与 3 对应；于是平面上的点 M 就确定了一个数对 4 与 3. 习惯上，我们把对应于 x 轴上的数写在前面，把对应于 y 轴上的数写在后面，记为(4, 3).

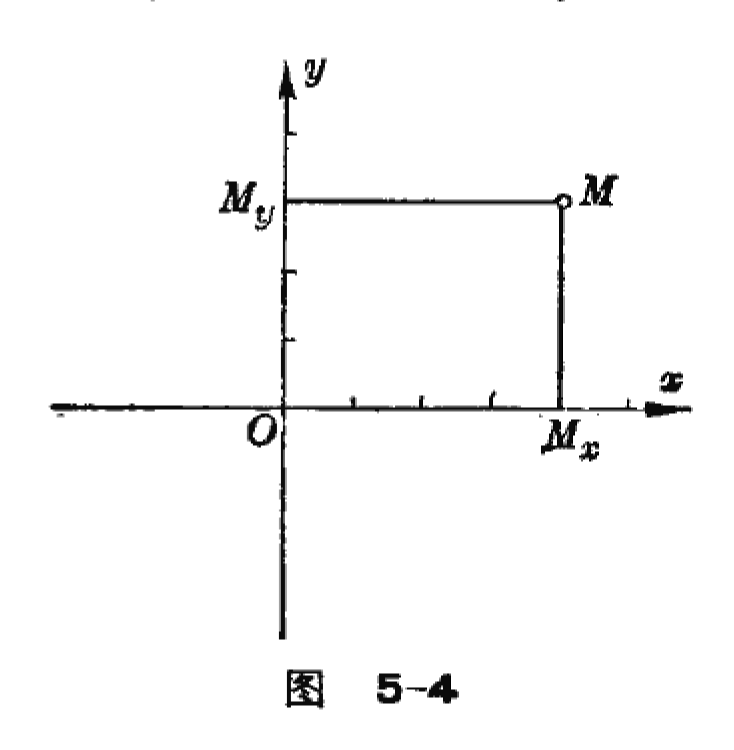


图 5-4

反过来，数对 (4, 3) 也将在平面上确定一个点. 规定第一个数 4 对应于 x 轴上的点 M_x，第二个数 3 对应于 y 轴上的点 M_y. 过 M_x 作 x 轴的垂线，过 M_y 作 y 轴的垂线，两垂线必有一交点，这个交点就是数对(4, 3)所确定的点.

一般地说，坐标平面上的点 M 与数对(x, y)间有一一对应关系，(x, y) 称为点 M 的坐标. 这里前一个数 x 是 M 的横坐标，后一个数是 M 的纵坐标，二者顺序不可颠倒. 坐标为(x, y)的点 M 通常记为 $M(x, y)$. 特别，原点为 $O(0, 0)$.

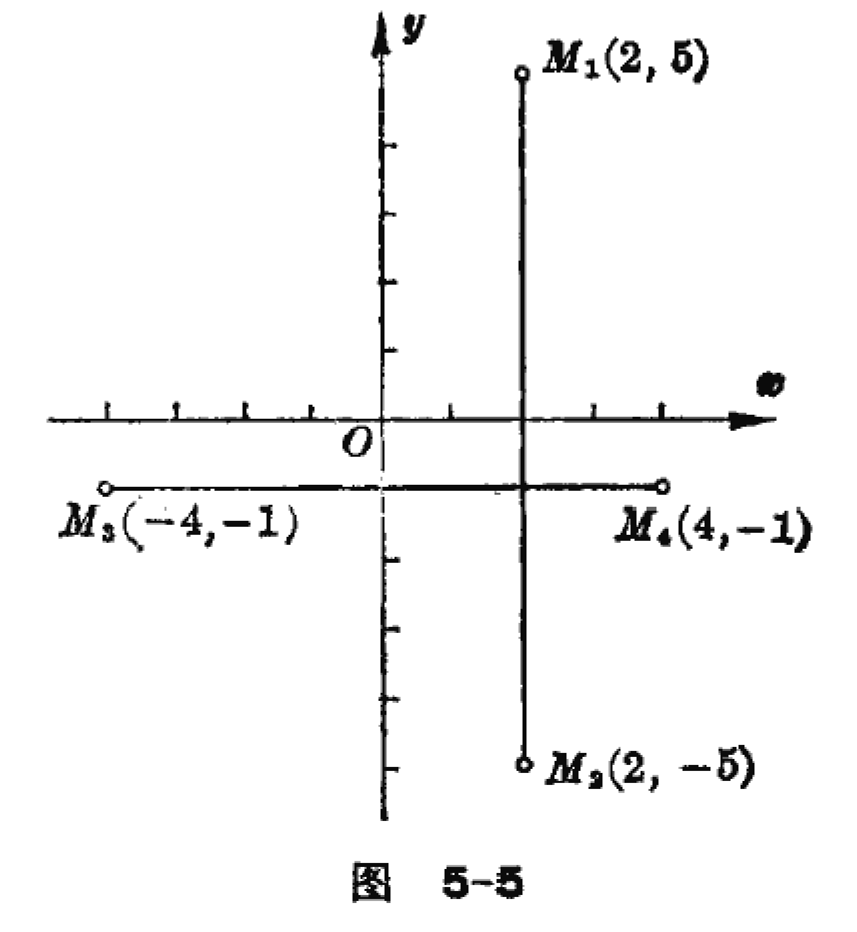
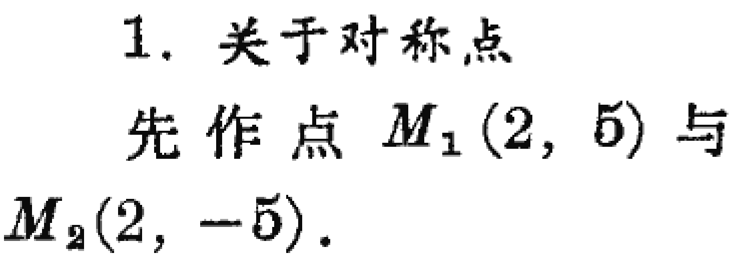


图 5-5



1. 关于对称点

先作点 $M_1(2, 5)$ 与 $M_2(2, -5)$.

在 x 轴上与 2 对应的点处作垂直于 x 轴的直线，在这直线上向上、向下各取 5 个单位得到两点（图 5-5），它们分别是所求的点 $M_1(2, 5)$ 与

$M_2(2, -5)$.

可以看出，点 $M_1(2, 5)$ 与 $M_2(2, -5)$ 在 x 轴的上下两侧，关于 x 轴对称.

依照同样的方法，还可以作出点 $M_3(-4, -1)$ 与 $M_4(4, -1)$. 这两点在 y 轴的左右两侧，关于 y 轴对称.

一般，横坐标相同、纵坐标互为反号数的两个点关于横轴对称；而纵坐标相同、横坐标互为反号数的两个点关于纵轴对称. 这就是说，

$$M_1(x, y) \text{ 与 } M_2(x, -y)$$

关于 x 轴对称；而

$$M_1(x, y) \text{ 与 } M_3(-x, y)$$

关于 y 轴对称(图 5-6).

2. 关于横轴与纵轴

先讨论横轴上点的坐标的特征.

由于横轴上点的纵坐标全为零，所以横轴上的点的坐标一定形如 $M(x, 0)$；反之，形如$M(x, 0)$ 的点，由于纵坐标为零，所以必在横轴上. 因此，横轴上点的坐标是以纵坐标等于零，即形如 $M(x, 0)$为其特征.

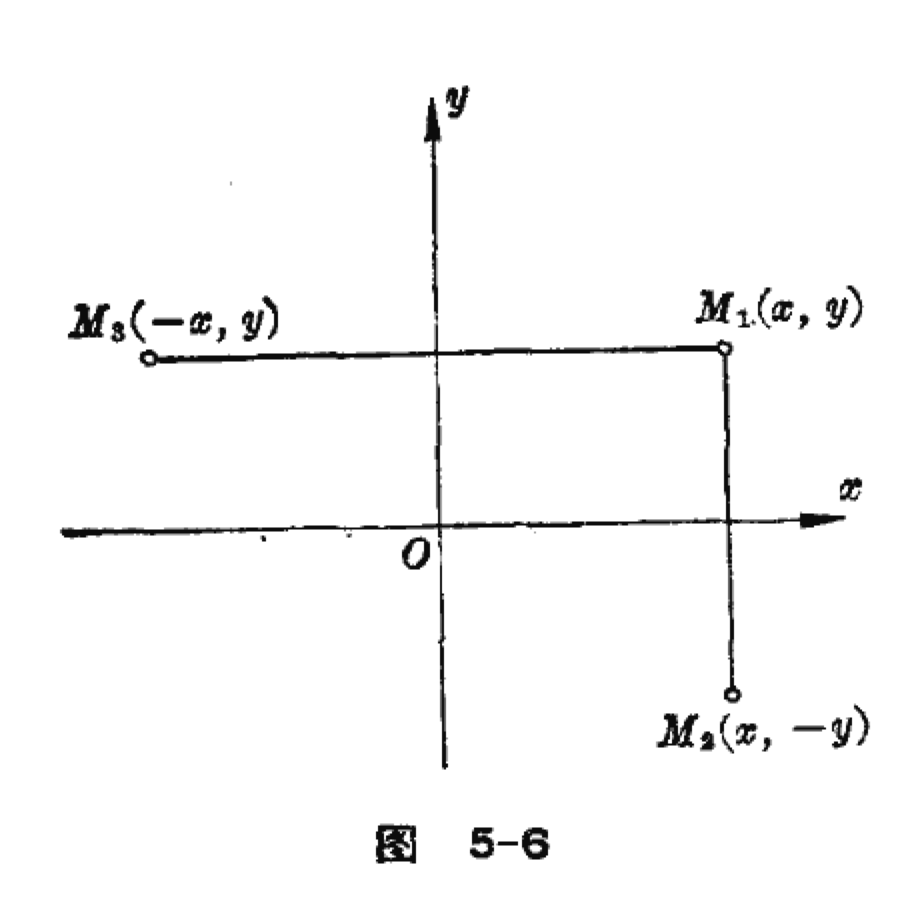


图 5-6

同样的道理，纵轴上的点的坐标是以横坐标等于零，即形如$M(0, y)$为其特征.

进一步讨论平行于坐标轴的直线.

举例来说，横轴向上平行移动两个单位(图 5-7)，其上的

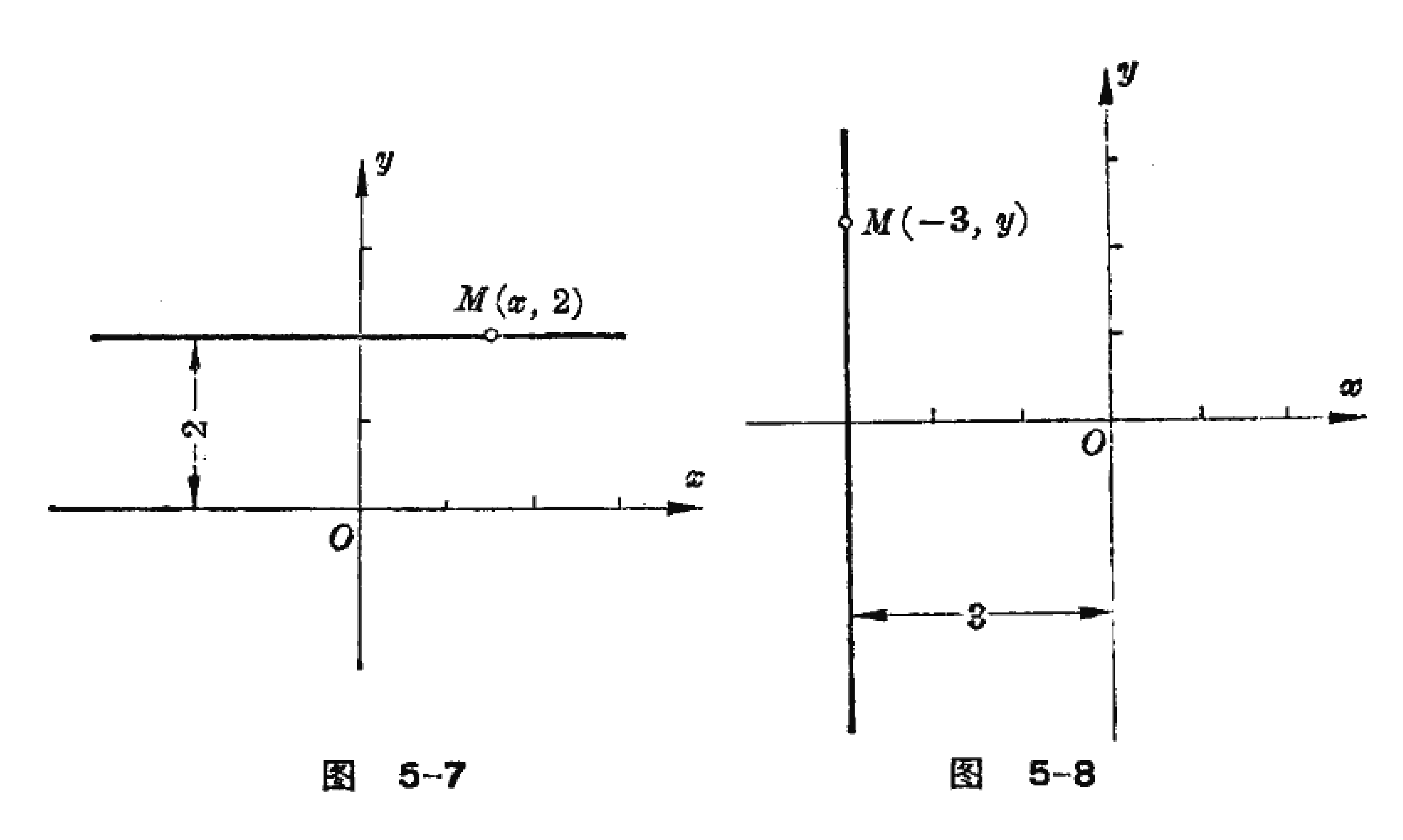


图 5-7　　图 5-8

点的纵坐标全是 2；反之，纵坐标是 2 的点也必在这条直线上．所以，横轴向上平移两个单位，其上的点的坐标是以纵坐标等于 2 为其特征．

同样的道理，纵轴向左平移三个单位(图 5-8)，其上的点的坐标是以横坐标等于 -3 为其特征．

3．关于线段之长

讨论平面上的点 $M\ (x,\ y)$ 到原点 $O\ (0,\ 0)$ 的距离 (图 5-9)．

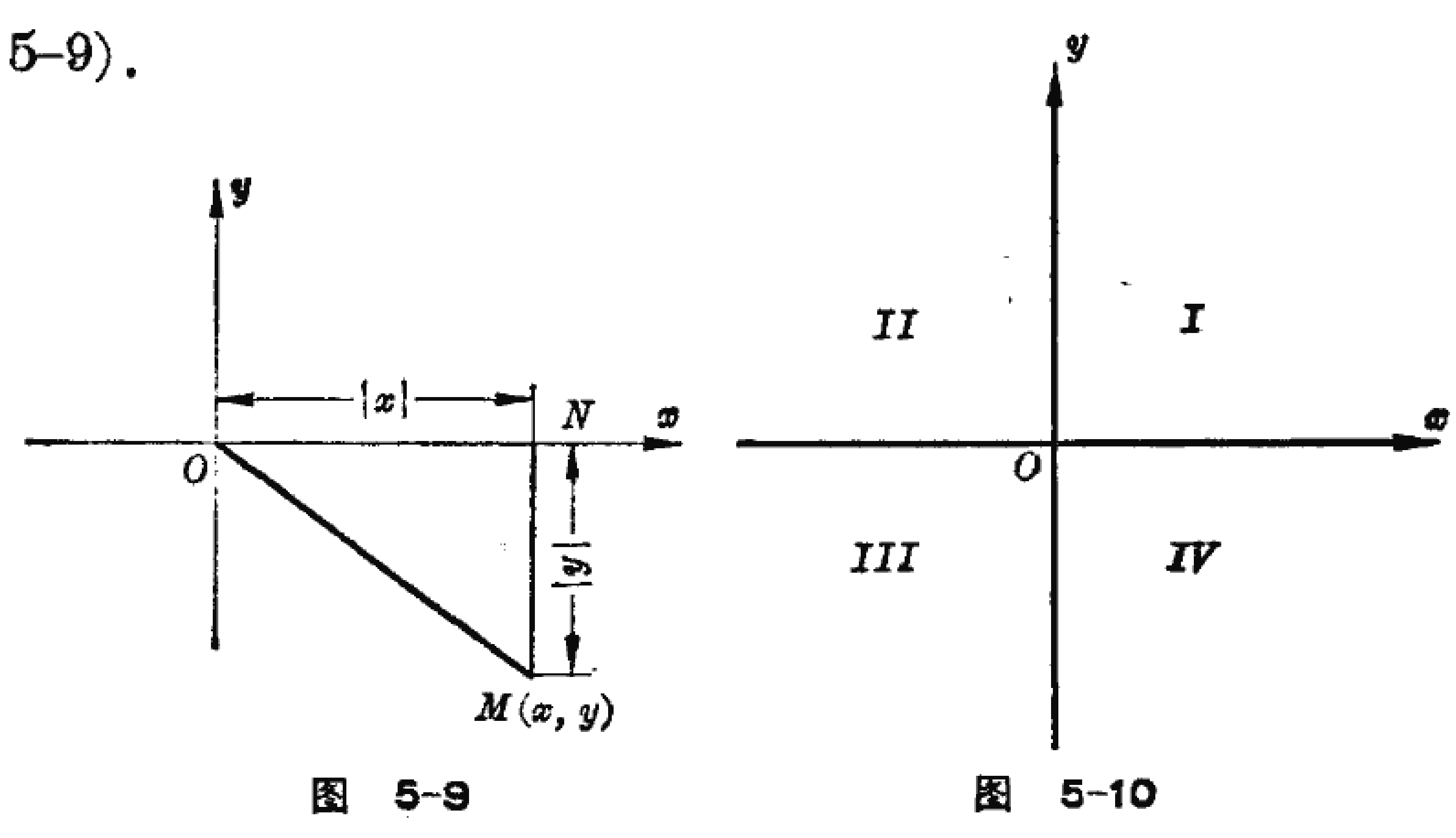


图 5-9　　图 5-10

作一个辅助三角形 MNO. 这是一个直角三角形, 两直角边的边长分别是 $|x|$ 与 $|y|$, 根据勾股定理,斜边 OM 之长等于 $\sqrt{|x|^2+|y|^2}$, 即

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

坐标轴把坐标平面分成为四个部分, 每一部分都称为一个象限. 象限的顺序如图 5-10 所示. 坐标轴上的点不属于任何一个象限. 不同象限中的点,其坐标有正有负,可以整理成一个表:

象限 / 坐标	I	II	III	IV
横坐标	+	−	−	+
纵坐标	+	+	−	−

二、角的概念的推广

我们知道,角是从一点引出两条射线所组成的图形,下面我们把角与圆周运动联系起来,从变动的观点给以理解.

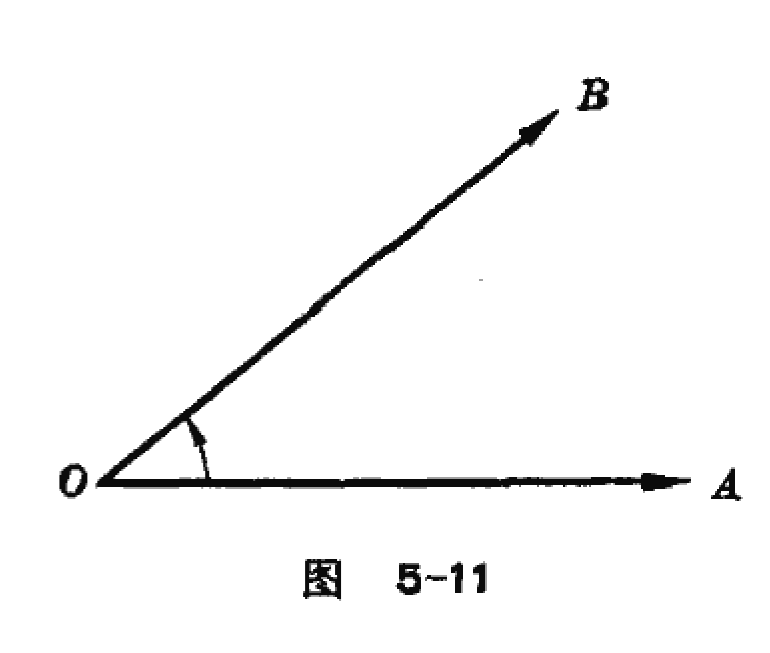


图 5-11

一条射线 OA 绕其端点 O 旋转到 OB 就形成一个角(图 5-11). 射线的初始位置是角的始边,终止位置是角的终边,端点是角的顶点.

旋转有两个方向——逆时针方向与顺时针方向. 二者是不同的,用正负号来反映这种差别. 我们规定:逆时针方向为旋转的正向,正向旋转所得角的值为正;顺时针方向为旋转的负向,负向旋转所得角的值为负. 例如正向旋转一个周角为

360°，负向则为 $-360°$；正向旋转一个平角为 180°，负向则为 $-180°$（见图 5-12）.

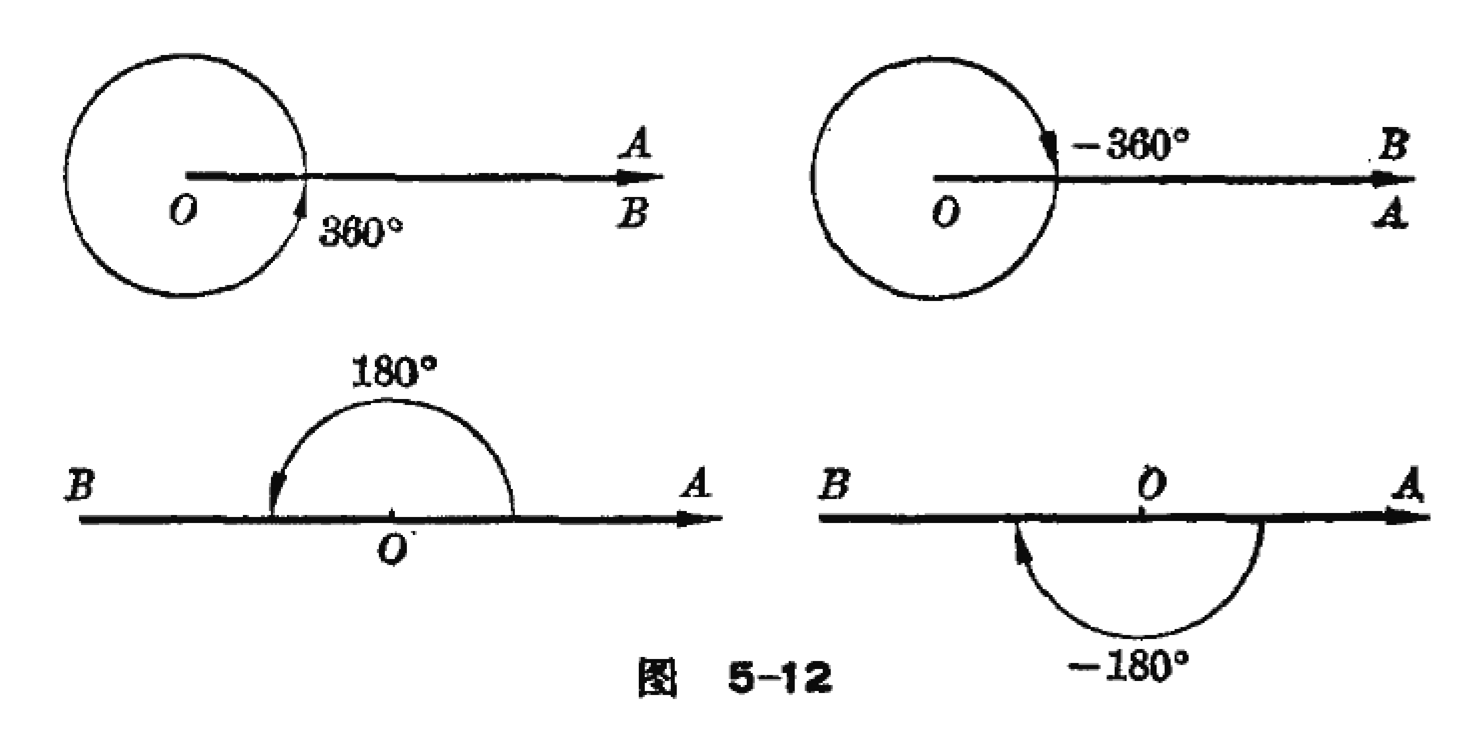


图 5-12

若射线 OA 按正向旋转 30° 达到 OB，接着按正向再转一周又达到了 OB. 如果继续按正向旋转二周、三周、……，就得到许多不同的角. 这些始边与终边相同的角分别是 30°、$30°+360°$、$30°+2\times360°$、……等. 一般地，与角 α 的始边、终边全相同的角，连同 α 在内，可以表示为

$$\alpha+k\times360°,$$

这里 k 是任意整数.

例如，$-90°$ 与 270° 有公共的始边与终边（图 5-13），在角的一般表示

$$-90°+k\times360°$$

中，它们分别是 $k=0$ 与 $k=1$ 时的对应值.

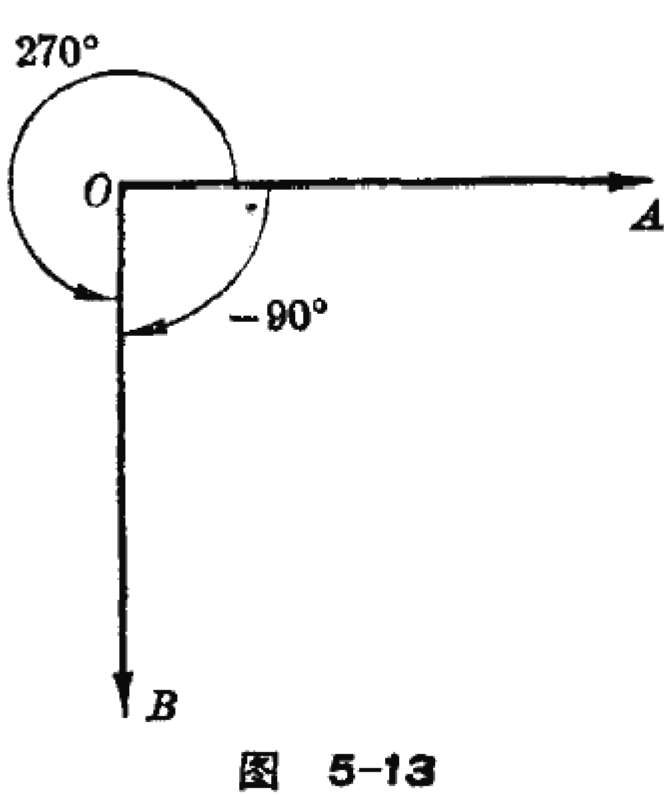


图 5-13

再如

30° 与 $-330°$，

150° 与 $-210°$，

225° 与 $-135°$，

$-30°$ 与 $-390°$

分别都有公共的始边与终边，在角的一般表示

$$30^\circ+k\times360^\circ,$$
$$150^\circ+k\times360^\circ,$$
$$225^\circ+k\times360^\circ,$$
$$-30^\circ+k\times360^\circ$$

中，它们分别是 $k=0$ 与 $k=-1$ 时的对应值.

考虑坐标平面上以坐标原点为顶点、正横轴为始边的角，按着终边所在的象限，可知

30°——第 I 象限的角，

150°——第 II 象限的角，

225°——第 III 象限的角，

-30°——第 IV 象限的角，

而 -330°、-210°、-135°、-390° 也分别是 I、II、III、IV 各象限的角.

关于角的大小，可以用度数来计算，也可以用弧度来计算. 我们知道，弧长等于半径的圆弧所对应的圆心角称为一弧度. 根据熟知的圆周长与圆半径的比值，一个周角等于 2π 弧度，下面列出度与弧度的对应值：

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧　度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

如不作特殊声明，今后所讨论的角都是坐标平面上以原点为顶点正横轴为始边的角.

小　结

1. 在坐标平面上，每一个点 M 都有一数对 (x, y) 与之

对应；反之，每一数对 (x, y) 对应于坐标平面上一个确定的点.

2. 横坐标相同、纵坐标互为反号数的两点关于横轴对称；纵坐标相同、横坐标互为反号数的两点关于纵轴对称.

一点 $M(x, y)$ 到原点的距离等于 $\sqrt{x^2+y^2}$.

3. 坐标平面为坐标轴分成 I、II、III、IV 四个象限. 各象限中点的坐标的符号如下：

$II(-, +)$	$I(+, +)$
$III(-, -)$	$IV(+, -)$

4. 角有正负之分，逆时针方向转成的角为正，顺时针方向转成的角为负.

5. 设 α 是任意一个角. 与 α 的始边、终边相重的角的全体记为

$$\alpha+2k\pi,$$

这里 k 取一切整数.

习　题

1. 描点：

$M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(0, 1)$, $M_4(-1, 0)$, $M_5\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

2. 描点并指明各属于哪个象限：

$A(2, 3)$, $B(-5, 4)$, $C(3.5, -2)$, $D(-3, -5)$,

$E(-2.5, 2)$, $F\left(4, -\frac{7}{2}\right)$, $G\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $H\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. 已知 $M(3, 5)$, $N(-2, 1)$, 求

(1) M 与 N 关于纵轴的对称点；

(2) M 与 N 关于横轴的对称点.

4. 求下列各点到原点的距离：

$M_1(3, 5)$, $M_2(3, -5)$, $M_3(-2, -4)$, $M_4(-2, 4)$.

5. 设 a、b 为两正数，试问点 $M_1(a, b)$, $M_2(-a, b)$, $M_3(-a, -b)$,

$M_4(a, -b)$,

(1) 各属于哪一个象限;

(2) 哪两个点关于纵轴对称, 哪两个点关于横轴对称;

(3) 哪两个点在平行于坐标轴的同一直线上;

(4) 终边分别过这四个点的角共有四个, 其中一个记为 α, 其余三个该如何表示.

6. 对于下列各角:

$0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $150°$, $180°$, $225°$, $270°$, $360°$, $390°$, $-30°$, $-90°$, $-180°$, $-330°$,

(1) 在坐标平面上画出这些角;

(2) 哪些角是第 *II* 或第 *IV* 象限的角;

(3) 哪些角有公共的终边,写出这些角的一般表示;

(4) 写出各角的弧度表示;

(5) 在数轴上描出各弧度的对应值.

7. 时间相隔 5 分钟,分针转过的角是多少? 相隔三小时、六小时,分针与时针各转过多少角? 并用弧度表示.

8. 在$[0°, 360°)$内找出与下列各角终边相同的角:

$-30°$, $-75°$, $-90°$, $-280°$, $750°$, $555°$, $1150°$.

9. 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$内找出与下列各角终边相同的角:

$-\frac{5}{6}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{24}{5}\pi$, $-\frac{31}{4}\pi$, $-\frac{7}{6}\pi$.

10. 在坐标平面上,求终边过下列各点的角的一般表示:

$M_1(2, 0)$, $M_2(0, 3)$, $M_3(-2, 0)$, $M_4(0, -4)$,
$M_5(1, 1)$, $M_6(2, -2)$, $M_7(-1, -1)$, $M_8(-2, 2)$.

第二节 三角比的概念

一、定 义

引进了平面直角坐标,又推广了角的概念,现在可以讨论

偏心驱动中活塞的运动规律了.

把圆盘的心放在坐标原点上，滑块记为$A(x,y)$，A到原点的距离记为r，$r=\sqrt{x^2+y^2}$于是一正数．滑槽BC是平行横轴的线段，位置特征是纵坐标等于y（图5-14）.

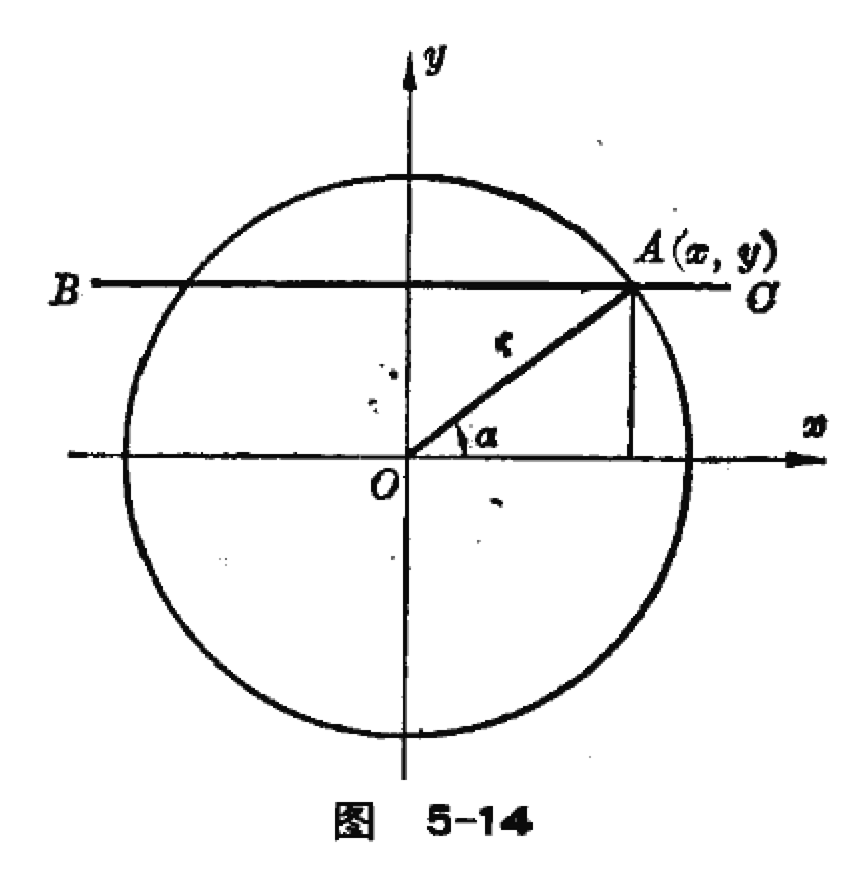


图 5-14

我们知道，圆盘的转角α决定滑槽的位置y，现在讨论y与α之间的关系.

当α介于0到$\frac{\pi}{2}$之间时，可以作一个锐角为α的直角三角形（图5-14）。根据正弦的定义，当α给定后，比值$\frac{y}{r}$也跟着确定了，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

从中看出，一个锐角α的正弦，既可以用直角三角形角α的对边与斜边之比来定义，又可以用α终边上任一点的纵坐标与该点到原点距离之比来定义．而后一种定义使我们有可能把三角比概念推广到任意角的情形.

当α超出0到$\frac{\pi}{2}$这个范围时，由于$\frac{y}{r}$这个比值始终只依赖于α，所以我们仍然沿用正弦记号表示$\frac{y}{r}$与α之间的关系，规定

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

这里，r是正数，所以$\sin\alpha$的符号由y的符号决定.

这样，不论 α 是正还是负，小于 $\frac{\pi}{2}$ 还是大于 $\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha$ 都有了意义；而 y 与 α 之间的关系都是

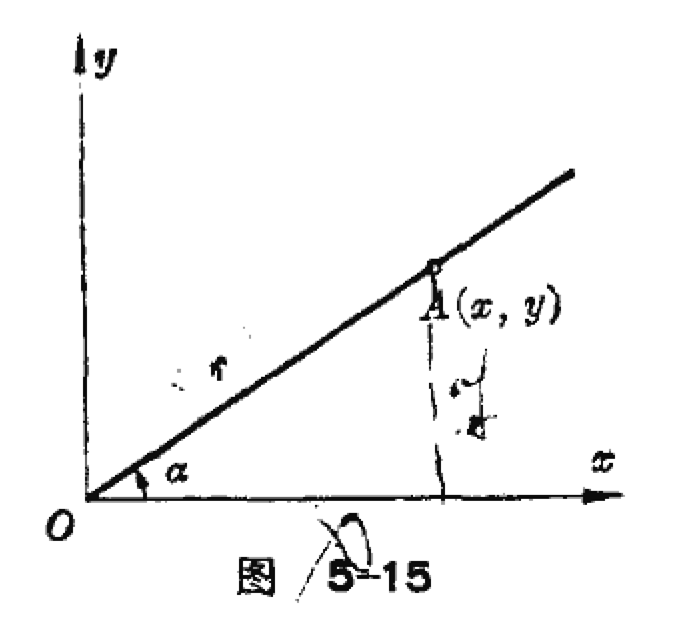


图 5-15

$$y=r\sin\alpha.$$

这就是偏心驱动中活塞的运动规律．现在，我们从这个模型的数量关系中概括出任意角的三角比．

在坐标平面上，对于任意一个角 α，在它的终边上取定一点 $A(x, y)$，A 到原点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$（图 5-15）．我们规定：

$\frac{y}{r}$ 称为角 α 的正弦，记为 $\sin\alpha$，

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$

$\frac{x}{r}$ 称为角 α 的余弦，记为 $\cos\alpha$，

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$\frac{y}{x}$ 称为角 α 的正切，记为 $\operatorname{tg}\alpha$，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x};$$

$\frac{x}{y}$ 称为角 α 的余切，记为 $\operatorname{ctg}\alpha$，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y};$$

$\dfrac{r}{x}$ 称为角 α 的正割①，记为 $\sec\alpha$，

$$\sec\alpha=\frac{r}{x};$$

$\dfrac{r}{y}$ 称为角 α 的余割①，记为 $\csc\alpha$，

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割都称为三角比。

例如，已知角 α 的终边过一点 $A(-3,\ 4)$，A 到原点的距离 $r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$(图 5-16)，所以角 α 的各三角比为

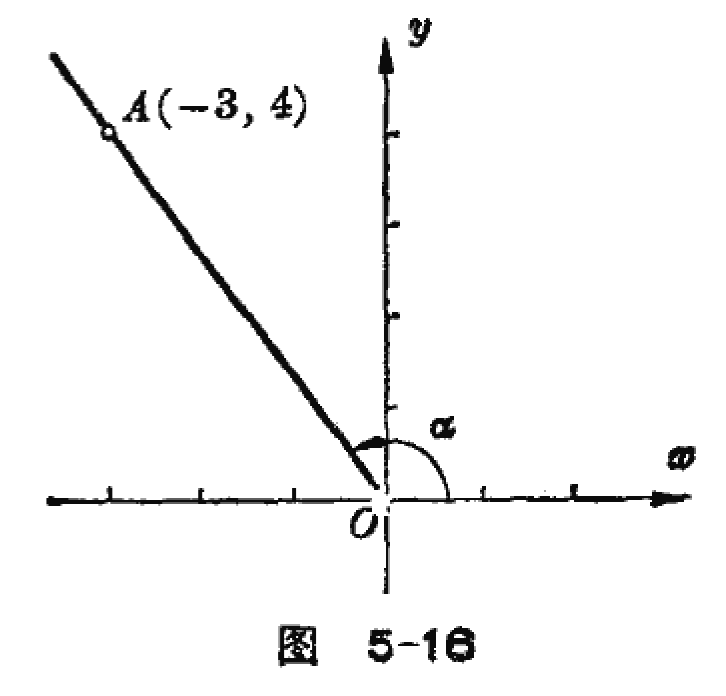


图 5-16

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{3}{4},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=-\frac{5}{3},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}.$$

我们已经不受三角形的限制，用坐标方法把三角比的概念推广到任意角了. 正如恩格斯所指出的那样，“**这对辩证法来说是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系**

① sec 是 secant 的简写，csc 是 cosecant 的简写。

中理解事物，而不是孤立地理解事物。"[1]

今后所说的三角比指的是任意角的三角比.

二、几 点 讨 论

根据定义，容易知道三角比之间成立以下诸等式：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

从后一组等式得到

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

由于有这样一种简单的对应关系，今后我们将着重讨论 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, 只在必要的时候才涉及到其余的三角比.

在0到 $\frac{\pi}{2}$ 的范围内，三角比的数值可以通过查表而得到. 特别可以列出几个特殊角的三角比的值：

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1. 三角比的符号

对于第 I 象限角，由于它的终边上点的横坐标与纵坐标全为正，所以它的各三角比全取正值. 对于其余的角，由于它

[1] 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 243 页。

们终边上点的横坐标与纵坐标可能取正值，也可能取负值，因此各三角比的值也就正负不一了.

对于正弦 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ 来说，r 总是一个正数，$\sin\alpha$ 的符号取决于 y 的符号，所以第 I、II 象限角的正弦取正值，第 III、IV 象限角的正弦取负值.

同样的道理，第 I、IV 象限角的余弦取正值，第 II、III 象限角的余弦取负值；第 I、III 象限角的正切取正值，第 II、IV 象限角的正切取负值.

这三个三角比的符号可以简明地由下图表示：

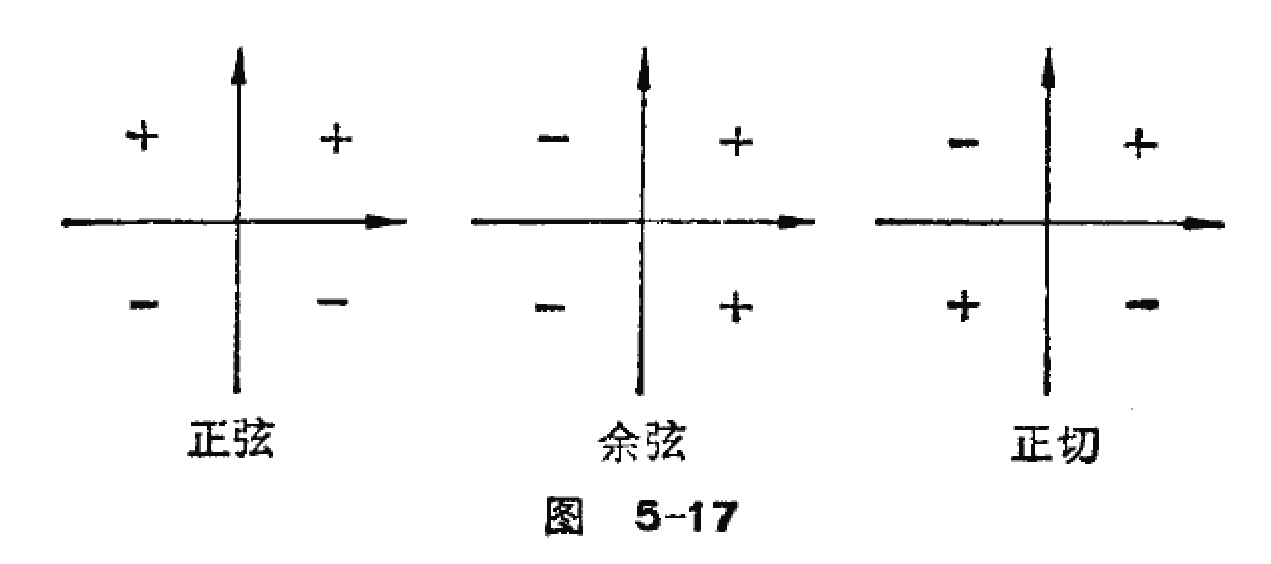


图 5-17

例如，角 $\frac{4}{5}\pi$ 在第 II 象限，于是

$$\sin\frac{4}{5}\pi \text{ 为正，而 } \cos\frac{4}{5}\pi,\ \operatorname{tg}\frac{4}{5}\pi \text{ 全为负.}$$

角 $230°$ 在第 III 象限，于是

$$\operatorname{tg}230° \text{ 为正，而 } \sin 230°,\ \cos 230° \text{ 全为负.}$$

角 $-\frac{\pi}{5}$ 在第 IV 象限，于是

$$\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) \text{ 为正，而 } \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right),\ \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) \text{ 全为负.}$$

2．三角比的周期性

我们上面介绍的三角比概念是从圆周运动中抽象出来

的，这种概念应该反映出圆周运动的周期性——每转一周运动又回复到原来的状态．现在讨论三角比的周期性．

我们知道，与 α 有公共终边的角可以表示为

$$\alpha+2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

由于与 α 的终边相同，依三角比的定义，它们的正弦和余弦也应相等，所以，对任一整数 k，都有

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,$$

$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha.$$

这两个等式说明，角每增加 2π，正弦与余弦都回复到原来的值，2π 称为正弦与余弦的周期．

例如，因为 $390°=30°+360°$，所以

$$\sin 390°=\sin 30°=\frac{1}{2},\quad \cos 390°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又因为 $\frac{9}{4}\pi=2\pi+\frac{\pi}{4}$，所以

$$\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{9}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3．三角比定义的补充讨论

为了研究三角比的性质，引进单位圆概念．

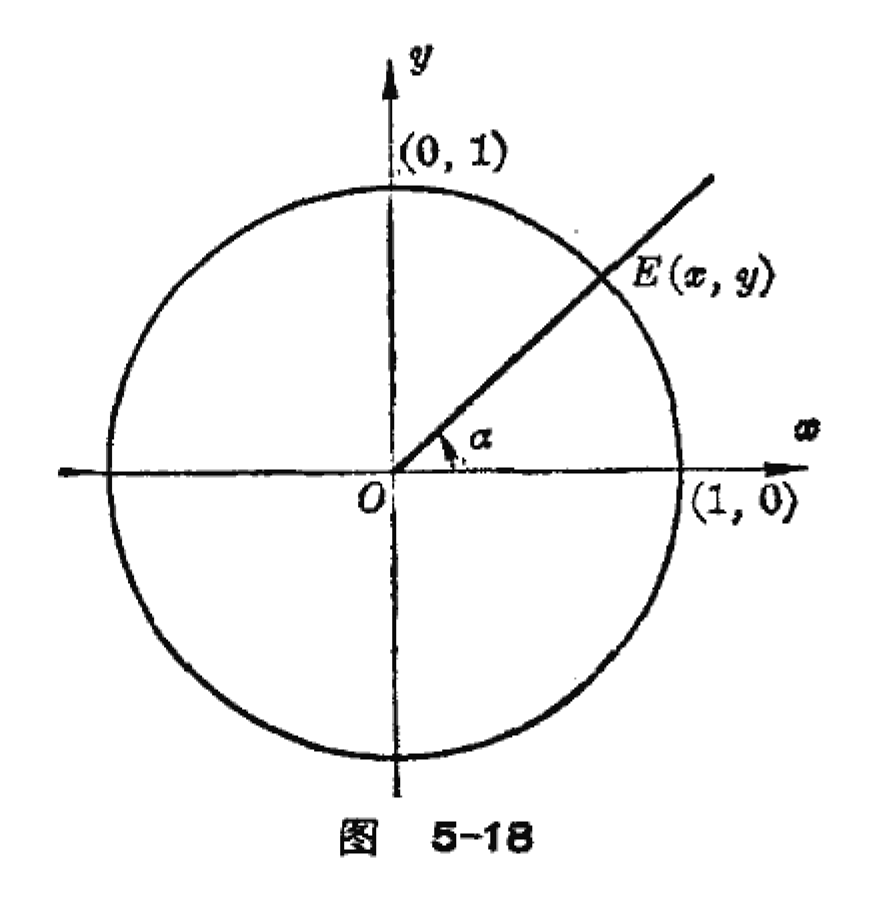


图 5-18

在坐标平面上，以原点为心、1 为半径的圆称为单位圆（图 5-18）．对于任意角 α，它的终边与单位圆正好有一个交点，记为 $E(x,\ y)$．$E(x,\ y)$ 到原点的距离是 1，因此得到正弦与余弦的更为简单的定义形式：

正弦：$\sin\alpha=y$，

余弦：$\cos\alpha=x$.

在单位圆与横轴的交点 $E_1(1,0)$ 与 $E_2(-1,0)$ 处，作单位圆的切线 E_1T_1 与 E_2T_2(图 5-19)．对于第 I、IV 象限角 α，角的终边与切线 E_1T_1 正好有一个交点 F_1(图 5-19(甲))，F_1 的横坐标是 1，纵坐标记为 y. 由正切定义，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{1}=y$.

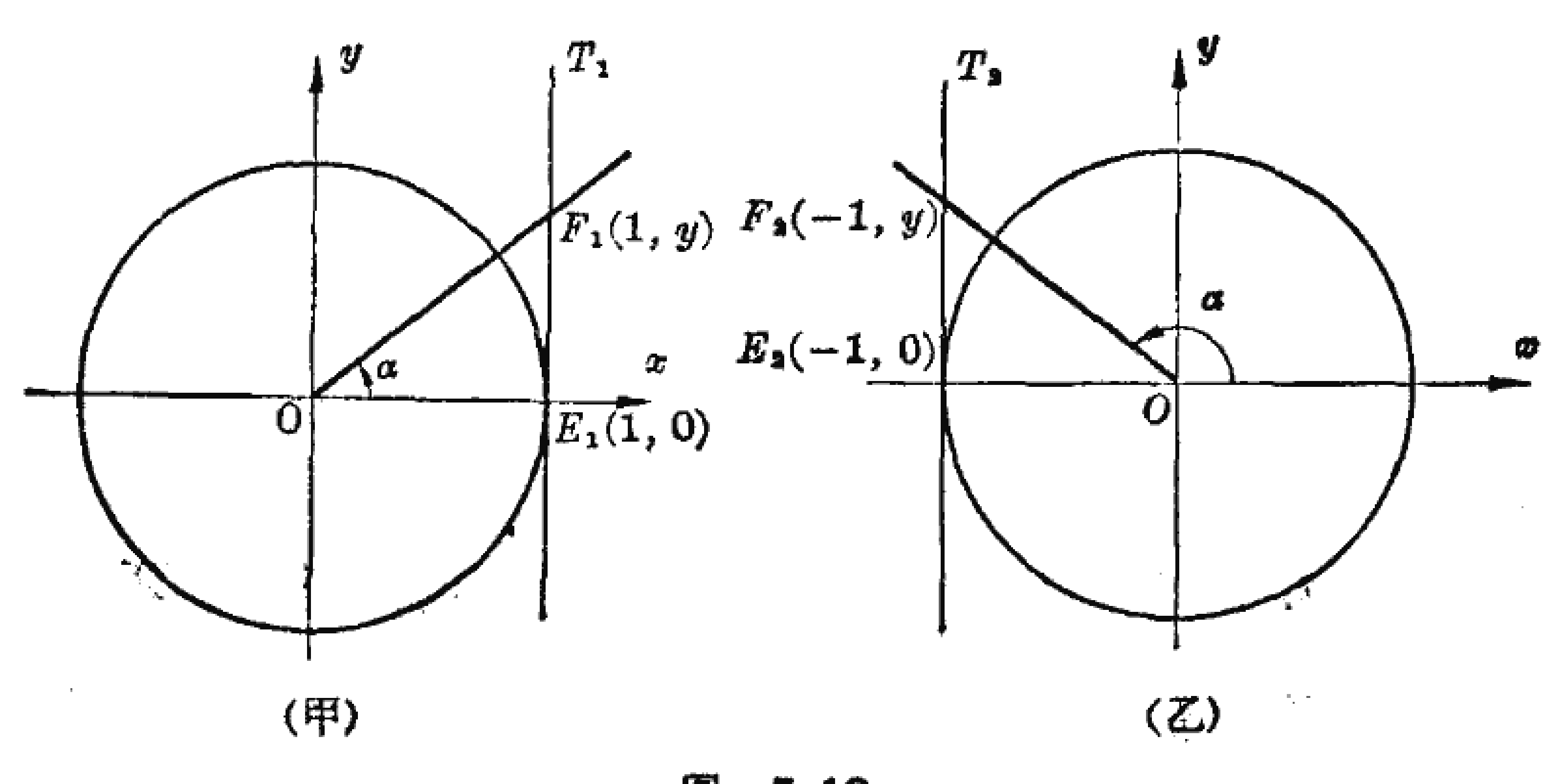


图 5-19

对于第 II、III 象限的角 α，其终边与切线 E_2T_2 也正好有一个交点 F_2(图 5-19(乙))，F_2 的横坐标是 -1，纵坐标记为 y. 由正切定义，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{-1}=-y$.

我们得到正切的更为简单的定义形式：

$$\operatorname{tg}\alpha=\begin{cases} y, & \alpha \text{ 在第 } I、IV \text{ 象限}, \\ -y, & \alpha \text{ 在第 } II、III \text{ 象限}. \end{cases}$$

今后常常使用这种定义形式.

可以看出，当角 α 的终边与纵轴重合时，α 的正切没有意义.

作为一个例题，我们讨论满足

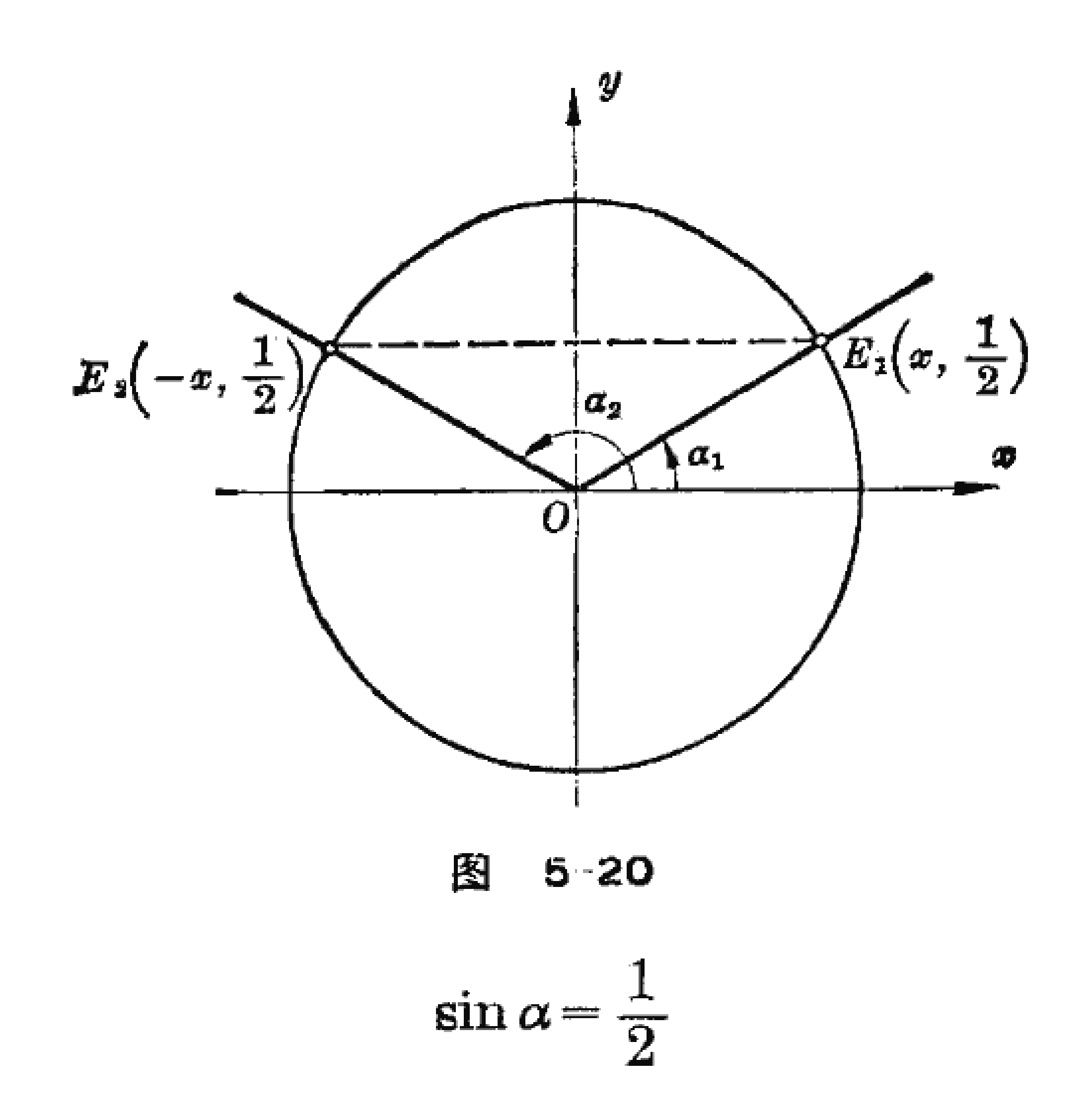


图 5-20

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

的角。

在图 5-20 的单位圆上，纵坐标等于 $\frac{1}{2}$ 的点正好有两个，这两个点关于 y 轴对称，记为 $E_1\left(x, \frac{1}{2}\right)$ 与 $E_2\left(-x, \frac{1}{2}\right)$. 以 OE_1 与 OE_2 为终边的角分别记为 α_1 与 α_2. 根据正弦定义的补充讨论，α_1 与 α_2 就是 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的对应角.

容易知道，$\alpha_1=30°$ 而 $\alpha_2=180°-30°$，这两个角的一般表示为

$$\alpha_1=30°+k\times360°,\quad \alpha_2=(180°-30°)+k\times360°.$$

小　结

1. 设 α 是一个角，$M(x, y)$ 是角 α 终边上任意一点，r 是 $M(x, y)$ 与原点的距离；我们规定

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

2．符号规则

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−

3．周期性

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha.$$

4．角 α 的终边与单位圆的交点记为 (x, y)，于是

$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x.$$

5．角 α 的终边与单位圆过点 $(1, 0)$、$(-1, 0)$ 的切线的交点记为 $(1, y)$、$(-1, y)$，于是

$$\operatorname{tg}\alpha=\begin{cases} y, & \alpha\text{ 是 } I\text{、}IV \text{ 象限角},\\ -y, & \alpha\text{ 是 } II\text{、}III \text{ 象限角}.\end{cases}$$

习　　题

1．已知角 α 的终边上一点的坐标，求 α 的各三角比：

$M_1(3, 4)$；$M_2(-5, 12)$；$M_3(-8, -5)$；$M_4(\sqrt{2}, -1)$.

2．设角 α 的终边上一点的横坐标是 1，该点到原点的距离是 2，求

(1) 角 α 的各三角比；　(2) 在 $[0, 2\pi)$ 内 α 的值.

3．判断下列各三角比是正还是负：

$\cos 4.2\pi$，$\sin 5.3\pi$，$\operatorname{tg} 6.4\pi$，$\cos(-3)$，$\sin(-2)$.

4．判断 α 在哪一个象限：

(1) $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号；　(2) $\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号；

(3) $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\alpha$ 同号；　(4) $\cos\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$ 同号；

(5) $\sec\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\alpha$ 同号；　(6) $\sec\alpha$ 与 $\csc\alpha$ 异号.

5. 判断 α 是第几象限角:

(1) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}<0$;　　(2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}<0$;

(3) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha>0$;　　(4) $\sec\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha>0$.

6. 求下列各三角比的值:

(1) $\sin 420°$;　　(2) $\cos 2.25\pi$;

(3) $\operatorname{tg} 390°$;　　(4) $\sin\frac{13}{3}\pi$;

(5) $\cos 780°$;　　(6) $\operatorname{tg} 4.25\pi$.

7. 设 α 是第 I 象限角,说明

$$\sin\alpha+\cos\alpha>1,\quad \operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha.$$

8. 在坐标平面上画出下列各 α 角:

(1) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\sin\alpha=0.75$;　　(4) $\operatorname{tg}\alpha=3$.

9. 设角 α 适合 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, 求

(1) α 在$[0,\pi)$上的值; (2) α 在$[0,2\pi)$上的值; (3) α 的一切值.

10. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$, 求

$$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}.$$

第三节　三角比的值

一、计 算 公 式

第 I 象限角的三角比可以通过查表而得到, 那末其他角的三角比该如何计算呢? 这里先考察几个特例, 再概括出一般方法.

[例 1]　求 0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3}{2}\pi$ 各角的正弦、余弦和正切.

解: 先求 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 的正弦与余弦.

角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 的终边与单位圆的交点是 $E(0, 1)$ (图 5-21)，根据正弦与余弦的补充说明，

$$\sin\frac{\pi}{2}=1, \quad \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

同样的方法可求得 $\alpha=0$、$\alpha=\pi$、$\alpha=\frac{3}{2}\pi$ 时各角的正弦与余弦：

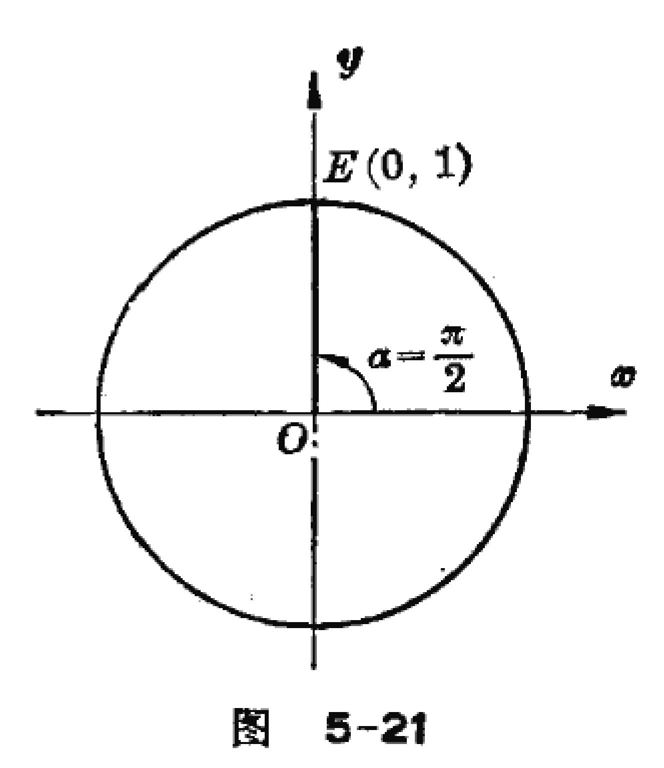


图 5-21

$$\sin 0=0, \quad \sin\pi=0, \quad \sin\frac{3}{2}\pi=-1,$$

$$\cos 0=1, \quad \cos\pi=-1, \quad \cos\frac{3}{2}\pi=0.$$

由比值关系 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，又得到

$$\operatorname{tg}0=0, \quad \operatorname{tg}\pi=0.$$

这些结果可以整理成一个表：

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	0	−1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	没意义	0	没意义

[例 2] 求 $\frac{2}{3}\pi$ 的正弦与余弦.

解：这是一个第 II 象限的角，它的终边与单位圆的交点记为 $E_2(x_2, y_2)$ (图 5-22)．根据正弦与余弦定义的补充讨论，

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{2}{3}\pi=x_2,\\ \sin\frac{2}{3}\pi=y_2.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

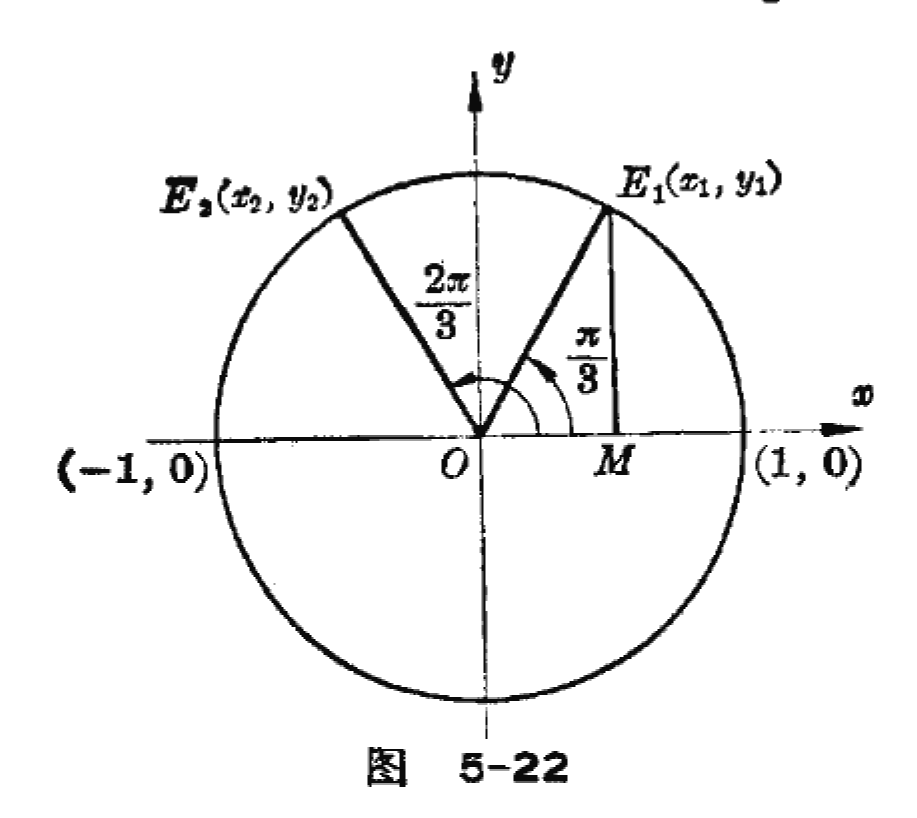


图 5-22

关键在于求出 x_2 与 y_2.

为此考虑 $E_2(x_2, y_2)$ 关于 y 轴的对称点 $E_1(x_1, y_1)$. $E_1(x_1, y_1)$ 在第 I 象限内，由对称性，

$$\left.\begin{aligned}-x_2=x_1,\\ y_2=y_1,\end{aligned}\right.\qquad(2)$$

容易知道，以 OE_1 为终边的角等于 $\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$，再由正弦与余弦的定义，

$$x_1=\cos\frac{\pi}{3},\quad y_1=\sin\frac{\pi}{3}.\qquad(3)$$

综合等式 (1), (2), (3)，得到

$$\cos\frac{2}{3}\pi=-\cos\frac{\pi}{3},\quad \sin\frac{2}{3}\pi=\sin\frac{\pi}{3},$$

而 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

我们知道，求一个角的三角比，关键在于算出这个角的终边与单位圆的交点的坐标. 对于第 I 象限的角，这只是直角三角形的边角计算问题；而对于其他象限的角，可以象上例一样，求出所给角的终边在第 I 象限内的对称线段，于是所求角的三角比便可通过第 I 象限相应角的三角比而算出.

以上的分析为我们指出了计算任意角的三角比的方法. 考虑下面四个角:

$$\alpha,\ \ \pi-\alpha,\ \ \pi+\alpha,\ \ -\alpha.$$

它们的终边与单位圆各有一个交点(图 5-23), 设角 α 的终边与单位圆的交点的坐标为 $E_1(x, y)$, 那末根据对称性, 其余三个角的终边与单位圆的交点的坐标可依次记为

$$E_2(-x, y),\ \ E_3(-x, -y),\ \ E_4(x, -y).$$

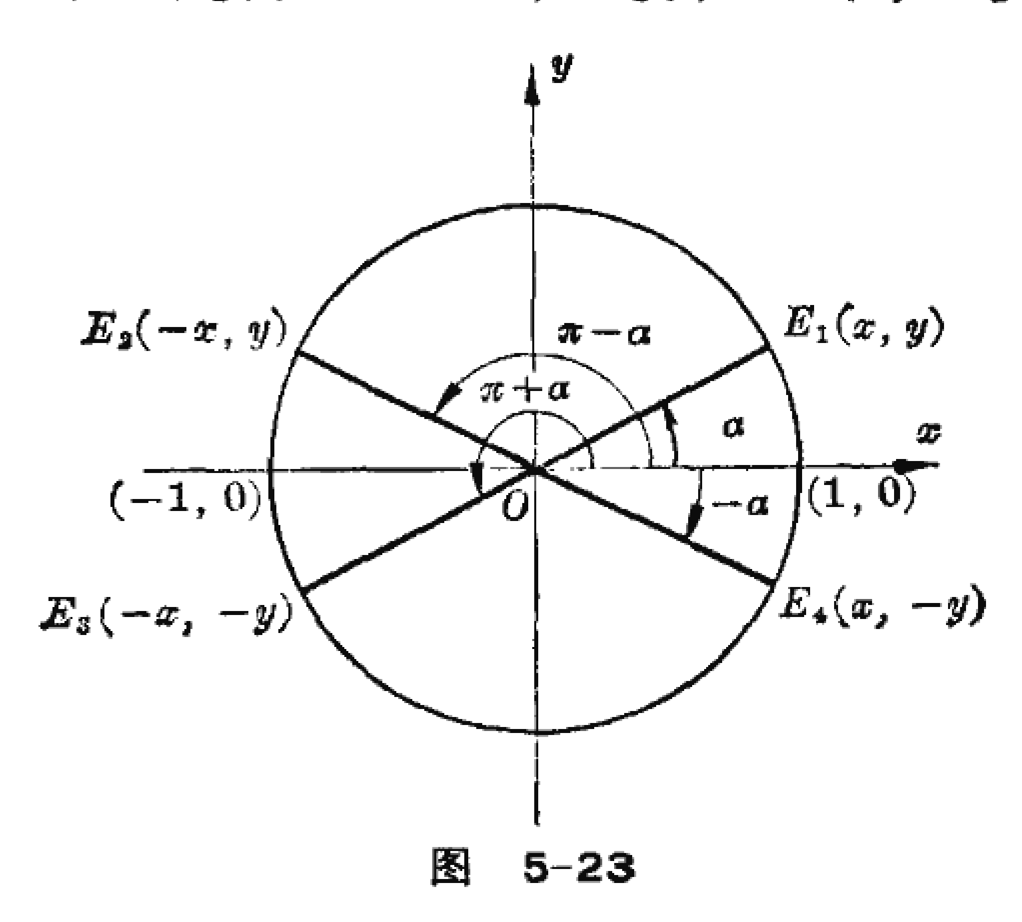


图 5-23

根据正弦定义,这四点的纵坐标分别是各对应角的正弦,于是得到正弦的计算公式:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

根据余弦的定义, 这四个点的横坐标分别是各对应角的余弦,于是得到余弦的计算公式:

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

由于 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，又得到正切的计算公式：

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

公式 $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$ 告诉我们，对于正切来说，角每增加 π（而不必增加 2π），就都回复到原来的值．因此对于任一整数 k，

$$\operatorname{tg}(\alpha+k\pi)=\operatorname{tg}\alpha.$$

所以正切以 π 为其周期．

二、举　　例

利用上面的三组公式，各象限角的三角比的计算便可以转化为第 I 象限角的相应三角比的计算．

[例 3]　求第 II 象限角 $\dfrac{5}{6}\pi$ 的正弦与余弦．

解：把这个角记为

$$\frac{5}{6}\pi=\pi-\frac{\pi}{6},$$

由公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，得

$$\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{6}.$$

同样，由公式 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，得到

$$\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{6},$$

而 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[例 4] 求第 III 象限角 $205°15'$ 的正弦与正切.

解：把这个角记为

$$205°15' = 180° + 25°15',$$

由计算公式 $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$，得到

$$\sin 205°15' = -\sin 25°15' = -0.42657;$$

由计算公式 $\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$，得到

$$\operatorname{tg} 205°15' = \operatorname{tg} 25°15' = 0.47163.$$

[例 5] 求第 IV 象限角 $-\frac{\pi}{3}$ 的余弦与正切.

解：由于 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$，$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$，所以

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

[例 6] 求 $\sin(-1195°)$ 的值.

解：我们通过这个例题，小结一下计算任意角的三角比的方法.

第一步：根据公式 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$，把负角的三角比化为正角的三角比：

$$\sin(-1195°) = -\sin 1195°.$$

第二步：根据周期性，把角 $1195°$ 的三角比化为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的角的相应三角比. 记

$$1195° = 3\times 360° + 115°.$$

于是 $\sin 1195° = \sin(3\times 360° + 115°) = \sin 115°.$

第三步：由于 $115° = 180° - 65°$，利用公式 $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$，化为第 I 象限角的三角比：

$$\sin 115° = \sin(180° - 65°) = \sin 65°.$$

第四步：查表得 $\sin 65° = 0.90631$.

所以

$$\sin(-1195°) = -0.90631.$$

求任意角的三角比问题都可以按这样的步骤进行.

小　　结

1. 计算公式：

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$

$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$

$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$

2. 正切以 π 为周期.

3. 任意角的三角比计算方法：

第一步：根据所求三角比的周期性，化为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的角的相应三角比.

第二步：根据计算公式，化为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上角的相应三角比.

习　　题

1. 求下列各角的三角比：

$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{7}{6}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{6}$.

2. 计算：

$\sin(-1680°)$，$\cos(-930°)$，$\operatorname{tg}690°$，

$\cos1.75\pi$，$\sin\frac{7}{2}\pi$，$\operatorname{ctg}(-1.25\pi)$.

3. 求值:

(1) $\sin 90° + 2\cos 0° - 3\sin 270° - 10\cos 180°$;

(2) $-a^2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b^2 \cos 0° + 2ab \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\sin 270° - 2\cos 360° - \operatorname{tg} 180°$.

4. 求下列各三角比的值:

$\sin 263°42'$, $\sin 341°18'$, $\cos 137°54'$, $\operatorname{tg} 253°42'$,
$\sin(-216°12')$, $\cos(-244°6')$, $\cos(-1751°36')$, $\operatorname{tg}(-160°52')$.

5. (1) 求周期:

$\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$;

(2) 用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示:

$\operatorname{ctg}(-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$, $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$.

6. 计算:

(1) $4\cos(-120°)\cdot\operatorname{tg} 300°$;

(2) $\frac{\sin 240°}{\cos(-60°)}\cdot\operatorname{tg} 330°$;

(3) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi\operatorname{ctg}\frac{7}{6}\pi$;

(4) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)\operatorname{tg}(-\alpha)}$;

(5) $\frac{6\sin 90° - 2\cos\pi + 5\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{tg} 180°}{5\cos\frac{3}{2}\pi - 5\sin 270° - 3\operatorname{tg} 0° - 5\operatorname{ctg} 90°}$;

(6) $\frac{\cos(\pi+\alpha)\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\sin(\alpha-\pi)}$.

第四节 由三角比求对应角

一、由三角比求对应角

前面解决了由角求三角比的问题,象边角计算一样,还要解决它的逆问题:由三角比求对应角,我们从简单情形入手,

先看下面的例子.

已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=-\sqrt{3}$，求 α 和 β.

由于 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，显然，$\frac{\pi}{6}$ 是我们所求 α 的一个值.

同样，由 $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，得 $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，所以 $-\frac{\pi}{3}$ 是我们所求 β 的一个值.

这里我们从已知三角比只求出了 α 和 β 的一个值，是否还有其他数值呢？事实上，一个三角比的对应角只要有就不止一个．就 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 来说，由于 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{6}$ 是一个对应角；由公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\pi-\frac{\pi}{6}$ 也是一个对应角；此外，由周期性，$\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 还有许多对应角．对于 $\operatorname{tg}\beta=-\sqrt{3}$ 来说，情形也相同．因此我们遇到了这样的问题：一个三角比究竟有哪些对应角，它们如何表示，这正是我们下面所要讨论的问题.

由三角比求对应角的问题有直观意义，我们就用直观的方法来解决这个问题.

[例 1]　讨论 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 的对应角，画出全部对应角并计算它们的值.

解：设角 α 的终边与单位圆的交点的纵坐标是 y，则

$$\sin\alpha=y.$$

现在已知 $y=\frac{1}{2}$，求对应角 α.

在单位圆上纵坐标为 $\frac{1}{2}$ 的正好有两点 $E_1\left(x,\ \frac{1}{2}\right)$，$E_2\left(-x,\frac{1}{2}\right)$（图 5-24），它们分布在关于纵轴对称的位置上.

以 OE_1 与 OE_2 为终边的两个角记为 α_1 与 α_2，它们都适合

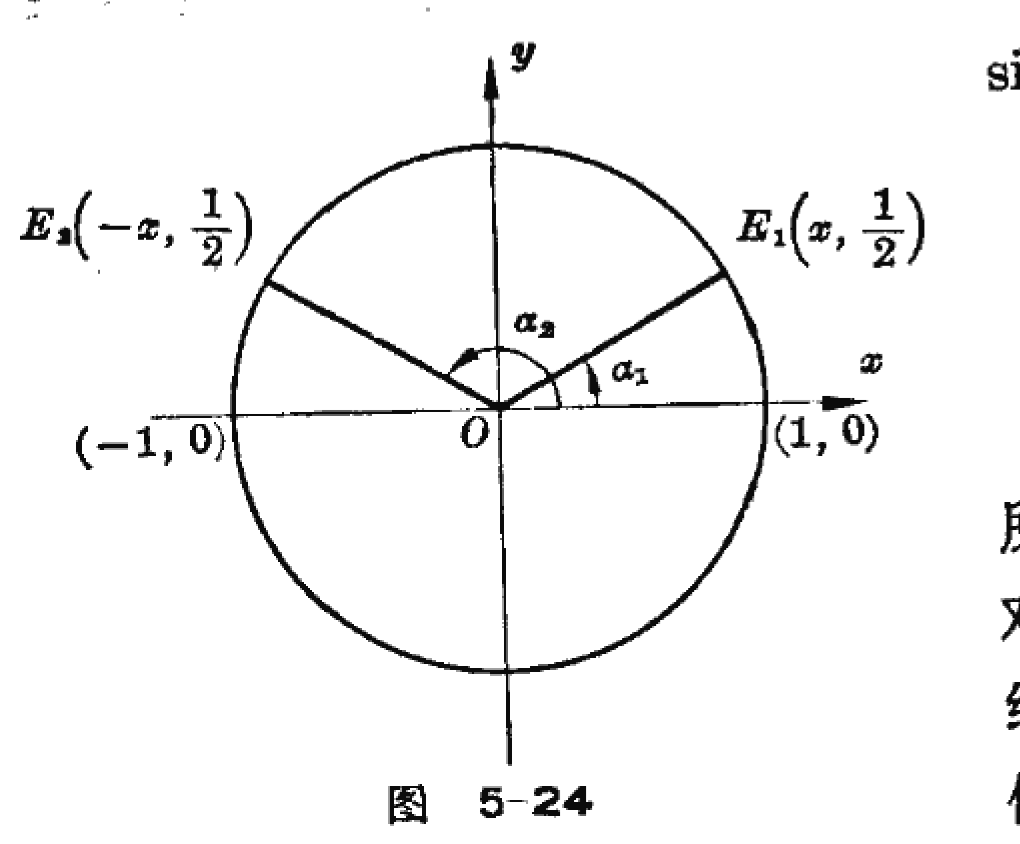


图 5-24

$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，即

$$\sin\alpha_1=\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha_2=\frac{1}{2},$$

所以 α_1 与 α_2 是所求的对应角，此外再也没有终边与 α_1，α_2 不同的其他对应角.

在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 α_1 只能取值 $\frac{\pi}{6}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 正好有一个对应角 $\frac{\pi}{6}$；在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上，由于 E_1 与 E_2 关于 y 轴对称，α_2 只能取值 $\pi-\frac{\pi}{6}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 也正好有一个对应角 $\pi-\frac{\pi}{6}$.所以在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 共有两个对应角，再由周期性，全部对应角就是

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

这里 k 取一切整数．它们的终边前者是 OE_1，后者是 OE_2.

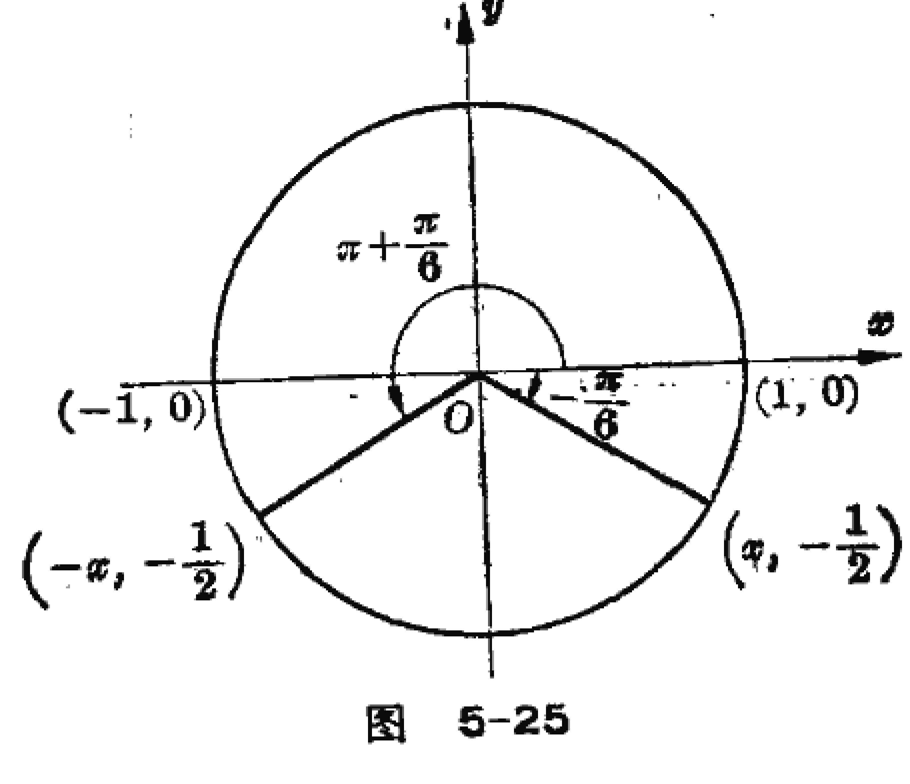


图 5-25

根据这个方法，可以讨论 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 的对应角（图 5-25）.

已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，由负角公式，$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，于是在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ 的对应角是 $-\frac{\pi}{6}$；在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的对应角是 $\pi+\frac{\pi}{6}$. 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 上共有这两个对应角，所以全部对应角就是

$$-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

$$\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi,$$

k 取一切整数.

[例 2] 已知 $\cos\alpha=0.50603$，画出全部对应角 α 并算出 α 的值.

解：设 α 的终边与单位圆的交点的横坐标为 x，则

$$\cos\alpha=x.$$

现在已知 $x=0.50603$，求对应角 α.

在单位圆上横坐标取 0.50603 的点正好有两点 $E_1(0.50603,\ y)$，$E_2(0.50603,\ -y)$（图 5-26），它们分布在关于横轴对称的位置上. 以 OE_1 与 OE_2 为终边的两个角记为 α_1 与 α_2，于是

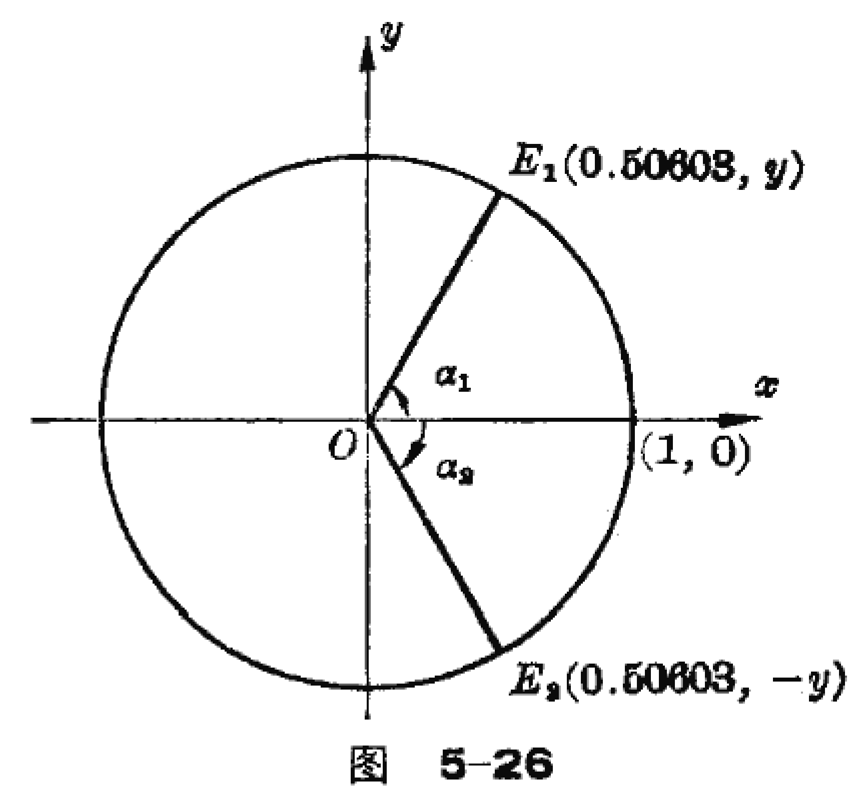


图 5-26

$$\cos\alpha_1=0.50603,$$

$$\cos\alpha_2=0.50603,$$

所以 α_1 与 α_2 是所求的对应角，此外再也没有终边与 α_1，α_2 不

同的其他对应角.

在$[0, \pi]$上 α_1 只能取值 $59°36'$，所以 $\cos\alpha=0.50603$ 正好有一个对应角$59°36'$；在$(-\pi, 0)$上α_2只能取值 $-59°36'$，所以 $\cos\alpha=0.50603$ 也正好有一个对应角 $-59°36'$. 在$(-\pi, \pi]$ 上共有这两个对应角，所以全部对应角就是

$$59°36'+k\times360°,$$
$$-59°36'+k\times360°,$$

这里 k 取一切整数. 它们的终边前者是 OE_1，后者是 OE_2.

根据上面的方法，可以讨论 $\cos\alpha=-0.50603$ 的对应角.

已知 $\cos59°36'=0.50603$，由于 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，于是

$$\cos(180°-59°36')=-0.50603.$$

所以，$\cos\alpha=-0.50603$ 在$[0, \pi]$上只有一个对应角 $180°-59°36'=120°24'$，在$(-\pi, 0)$上只有一个对应角 $-120°24$ (图 5-27)，全部对应角就是

$$120°24'+k\times360°,$$
$$-120°24'+k\times360°,$$

其中 k 取一切整数.

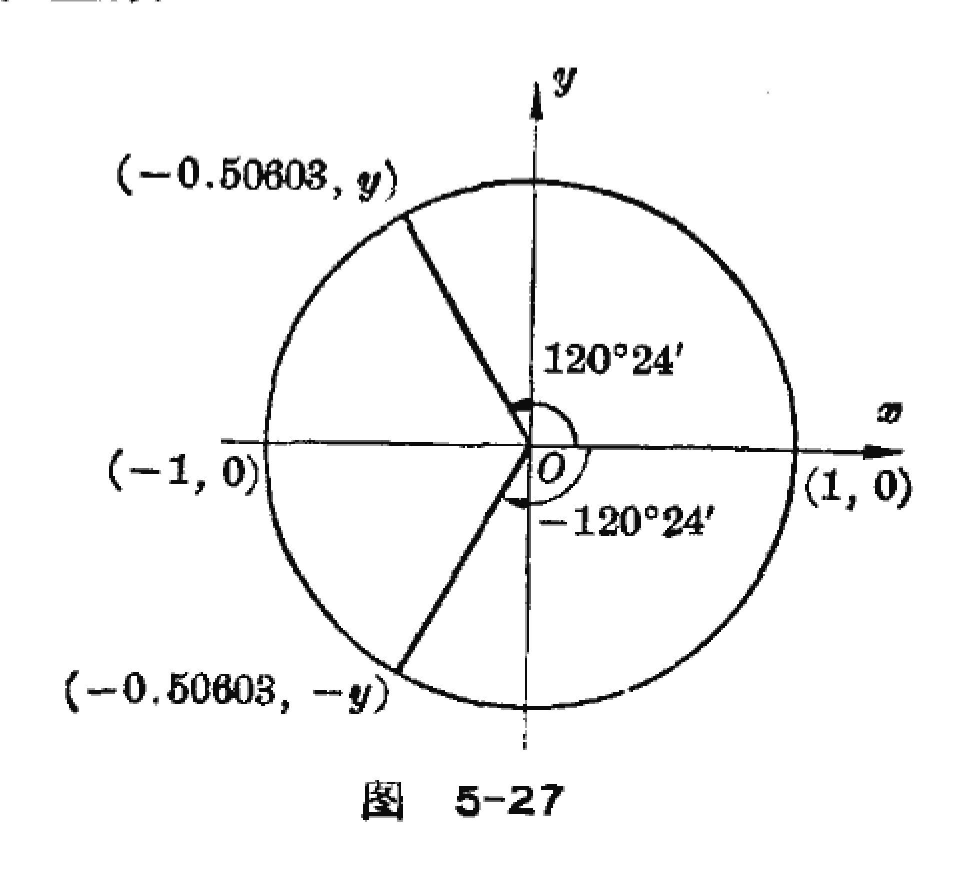


图 5-27

［例 3］ 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$，画出全部对应角 α 并算出 α 的值.

解：在 $E(1,0)$ 作单位圆的切线，角 α 的终边与这根切线有一个交点，它的横坐标是 1，纵坐标记作 y，于是

$$\operatorname{tg}\alpha=y.$$

现在 $y=-\sqrt{3}$，求对应角 α.

切线上纵坐标为 $-\sqrt{3}$ 的点记为 $F(1,-\sqrt{3})$（图 5-28），以 OF 为终边的角记为 α，于是

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}.$$

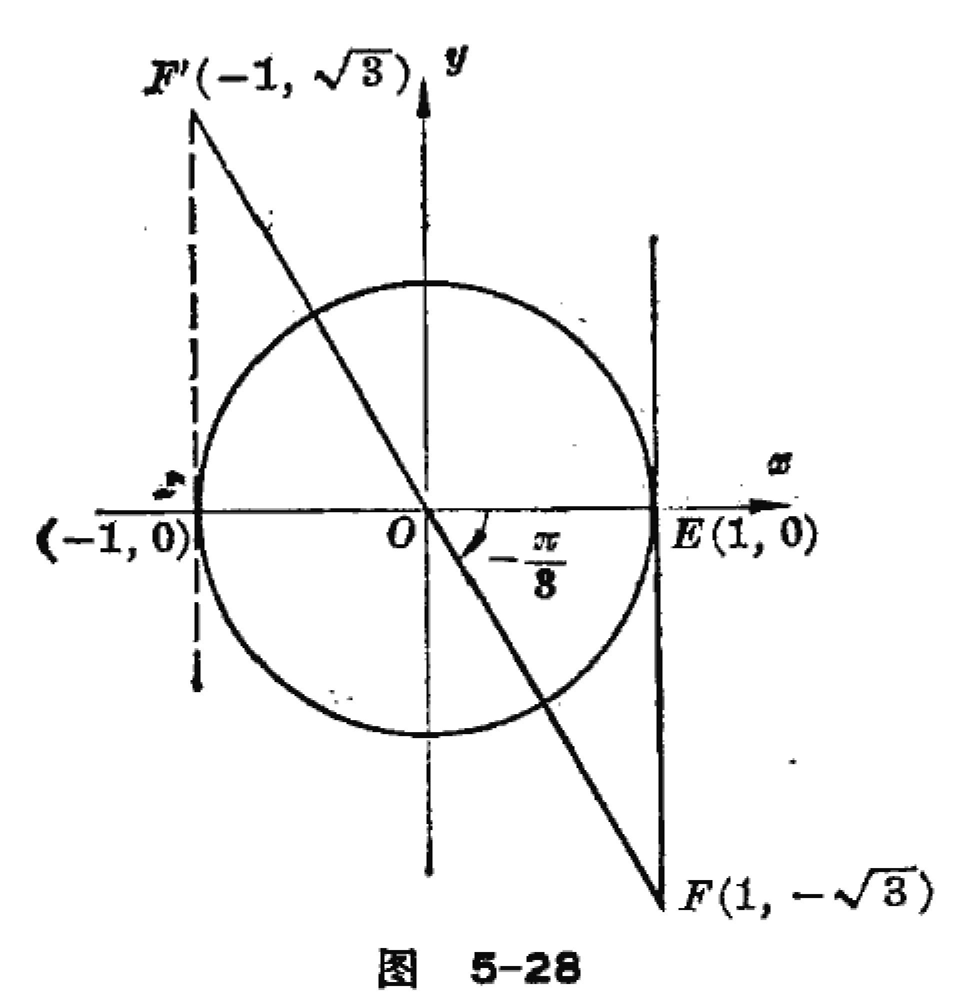


图 5-28

所以 α 是所求的角，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内没有终边与 α 不同的其他对应角.

在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内 α 只能取值 $-\frac{\pi}{3}$，所以 $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$ 的对应角是 $-\frac{\pi}{3}$；由于 $\operatorname{tg}\alpha$ 以 π 为周期，所以 $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$ 的全部对应角是

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

记 $F'(-1,\ \sqrt{3})$，当 k 取偶数时这些角的终边是 OF；当 k 取奇数时这些角的终边是 OF'.

二、三角比的对应角的表示法

一个三角比有无穷多个对应角，这些角之间是有内在联系的．为了研究问题的方便，我们找出其中一个具有"代表性"的值.

例如，对于 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 来说，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的对应角是 $\frac{\pi}{6}$；在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上的对应角是 $\pi-\frac{\pi}{6}$；全部对应角就是

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ 和 } \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

一般，对于任一 a，$-1\leqslant a\leqslant 1$，我们把正弦 $\sin\alpha=a$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的对应角选作"代表"，称为 a 的反正弦，记为

$$\arcsin a.$$

这样，在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的对应角就是(图 5-29)

$$\arcsin a \text{ 与 } \pi-\arcsin a,$$

而 $\sin\alpha=a$ 的全部对应角就可用 $\arcsin a$ 表示为

$$\arcsin a+2k\pi \text{ 和 } \pi-\arcsin a+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

不难写出

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\quad \arcsin 0=0.$$

对于 a，$-1\leqslant a\leqslant 1$，把 $\cos\alpha=a$ 在 $[0,\ \pi]$ 上的对应角称

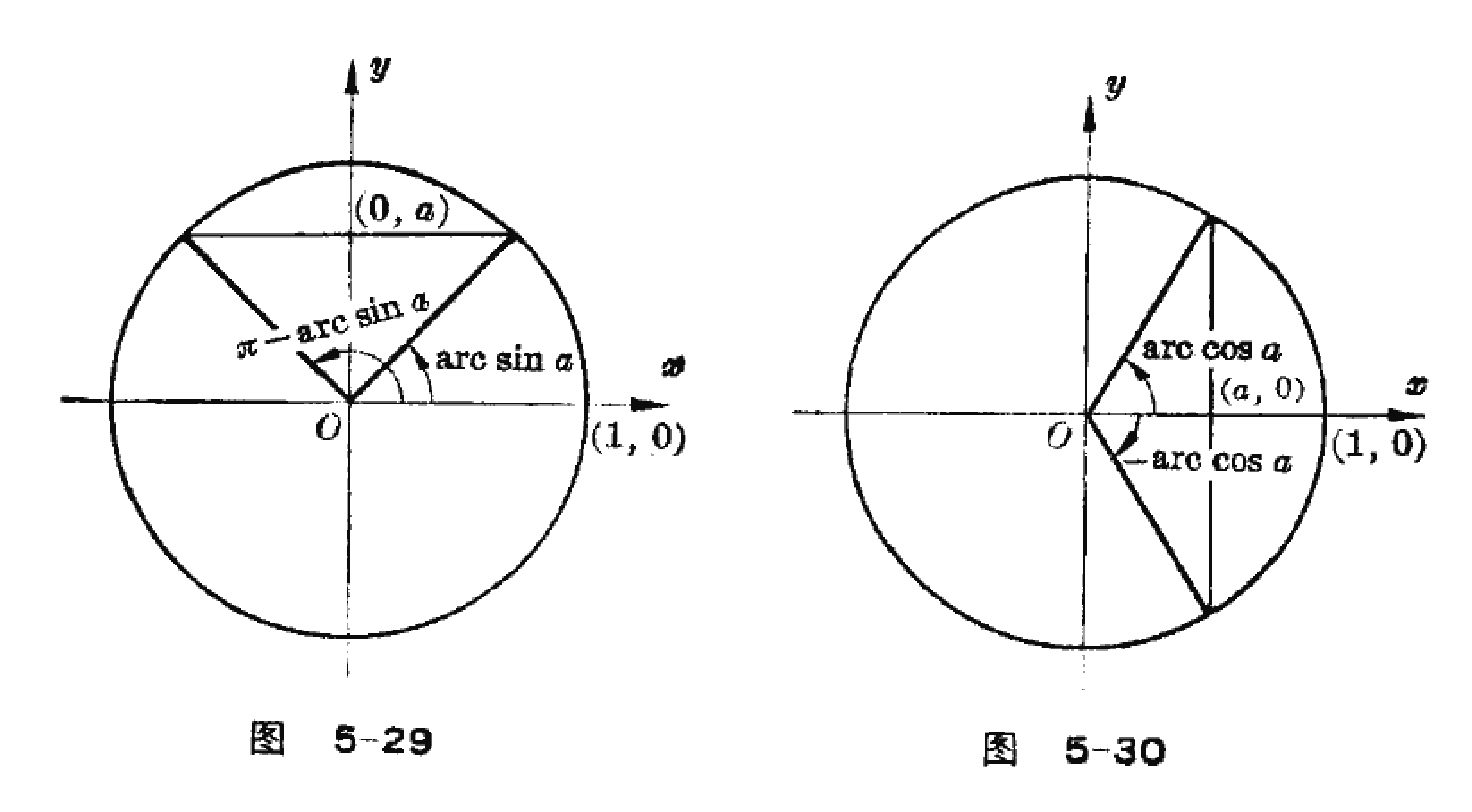


图 5-29　　图 5-30

为 a 的反余弦，记为

$$\operatorname{arc\,cos} a.$$

在 $(-\pi, \pi]$ 上的对应角就是(图 5-30)

$$\operatorname{arc\,cos} a \text{ 与 } -\operatorname{arc\,cos} a,$$

于是 $\cos\alpha = a$ 的全部对应角可以用 $\operatorname{arc\,cos} a$ 来表示为

$$\operatorname{arc\,cos} a + 2k\pi \text{ 和 } -\operatorname{arc\,cos} a + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

容易列出

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi,$$

$$\operatorname{arc\,cos} 1 = 0,$$

$$\operatorname{arc\,cos}(-1) = \pi.$$

对于正切 (图 5-31) 来说，$\operatorname{tg}\alpha = a$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的对应角称为 a 的反正切，记为

$$\operatorname{arc\,tg} a.$$

于是 $\operatorname{tg}\alpha = a$ 的全部对应角可以用 $\operatorname{arc\,tg} a$ 来表示为

$$\operatorname{arc\,tg} a + k\pi,$$

k 取一切整数.

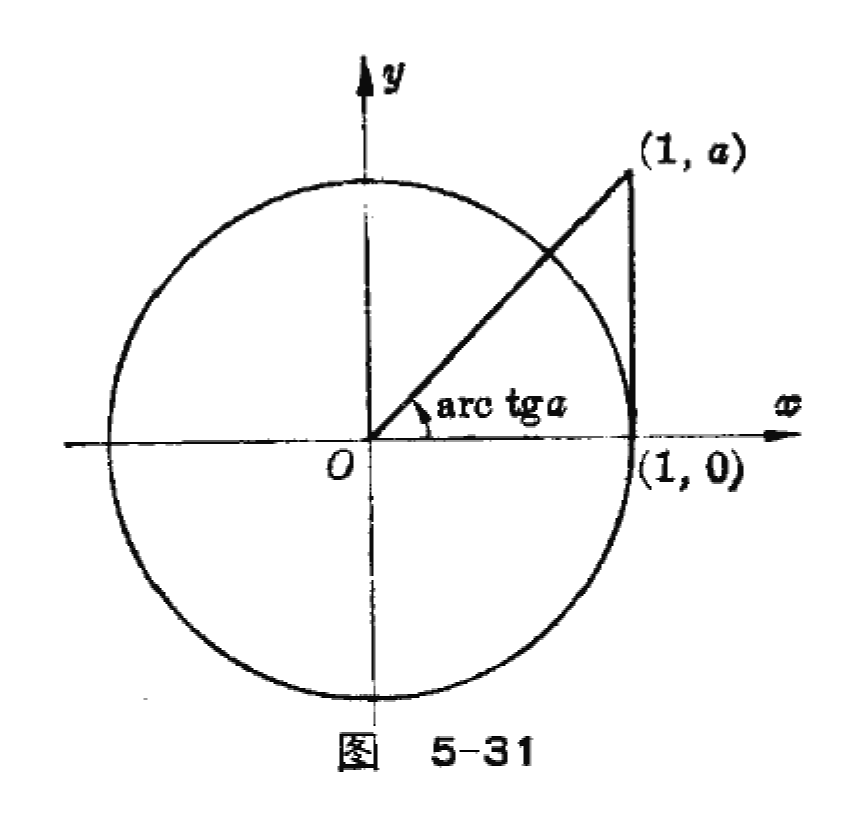


图 5-31

例如，

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}.$$

小　结

当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，$\sin\alpha=a$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的解记为 $\arcsin a$，它的全部解可以表示为

$$\arcsin a+2k\pi \quad 和 \quad \pi-\arcsin a+2k\pi.$$

当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，$\cos\alpha=a$ 在 $[0,\pi]$ 上的解记为 $\arccos a$，它的全部解可以表示为

$$\arccos a+2k\pi \quad 和 \quad -\arccos a+2k\pi.$$

当 $-\infty<a<\infty$ 时，$\operatorname{tg}\alpha=a$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的解记为 $\operatorname{arc\,tg}a$，它的全部解可以表示为

$$\operatorname{arc\,tg}a+k\pi,$$

这里，k 取一切整数。

$\arcsin a$，$\arccos a$，$\mathrm{arc\,tg}\, a$ 的取值范围各不相同，如下表：

$-1\leqslant a\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin a\leqslant \frac{\pi}{2}$
$-1\leqslant a\leqslant 1$	$0\leqslant \arccos a\leqslant \pi$
$-\infty<a<\infty$	$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{arc\,tg}\, a<\frac{\pi}{2}$

习　　题

1. 计算：

$\arcsin 0$，$\arccos 0$，　$\mathrm{arc\,tg}\, 0$，

$\arcsin 1$，$\arccos(-1)$，$\mathrm{arc\,tg}(-1)$。

2. 计算：

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$，　　$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$，　　$\arcsin 0.58779$，

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　　$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，　　$\arccos(-0.30902)$。

3. 证明：

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$；

$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$；

$\mathrm{arc\,tg}(-a)=-\mathrm{arc\,tg}\, a$。

4. (1) 求 $\sin\alpha=0.57358$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的对应角；

(2) 求 $\cos\alpha=0.72537$ 在 $[0,\ \pi]$ 上的对应角；

(3) 求 $\mathrm{tg}\,\alpha=-1.5399$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上的对应角；

(4) 求 $\sin\alpha=-0.83867$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的对应角；

(5) 求 $\cos\alpha=0.58779$ 在 $(-\pi, 0)$ 上的对应角;

(6) 求 $\operatorname{tg}\alpha=-0.72654$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的对应角;

(7) 求 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$ 上的对应角;

(8) 求 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ 在 $(-3\pi, -\pi)$ 上的对应角.

5. 画出下列各对应角,并表示这些对应角:

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha=3.$$

6. 下列各三角比，是否有对应角，如果有，把它们表示出来；如果没有,说明理由:

$$\sin\alpha=2, \quad \cos\alpha=-2, \quad \operatorname{tg}\alpha=2.$$

复　习　题

1. 在偏心驱动中，设主动轮以角速度 ω 弧度/秒旋转，试写出活塞的位置 y 随时间 t 变化的规律.

2. 设 A, B, C 是一个三角形的三内角,求证:

$\sin(A+B)=\sin C$;　$\cos(A+B)=-\cos C$;　$\operatorname{tg}(A+B)=-\operatorname{tg}C$.

3. 对于任意三角形 ABC，角 A, B, C 的对边分别记为 a, b, c，三角形的面积记为 S，求证:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

4. 证明:

(1) $-1\leqslant\sin x\leqslant1$ 对任一 x 成立;

(2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 对任一 x 成立;

(3) $\sin x\leqslant\operatorname{tg}x$ 对 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 成立.

5. 写出下列各式的值:

(1) $\sin\left[\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $\sin\left[\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$;

(2) $\cos\left[\arccos\frac{12}{13}\right]$, $\cos\left[-\arccos\frac{12}{13}\right]$;

(3) $\sin\left[\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right]$.

6. 设 $-1\leqslant a\leqslant 1$, 试写出:

(1) $\sin x=a$ 与 $\sin x=-a$ 的全部对应角;

(2) $\cos x=a$ 与 $\cos x=-a$ 的全部对应角.

7. 在不考虑空气阻力的条件下, 炮弹能达到的最大高度 h (米) 与初速 v(米/秒), 射角 θ 的关系是

$$h=\frac{v^2\sin^2\theta}{19.6}.$$

已知 h, v, 试写出求 θ 的算式.

第六章　三 角 恒 等 式

在前面几章中，我们遇到过的代数等式有两类．一类是代数方程，如

$$x^2-4x+3=0,$$

即
$$(x-1)(x-3)=0,$$

它只对一些特定的 x 值($x=1$, $x=3$)成立．另一类是代数恒等式，如

$$(x+1)^2=x^2+2x+1,$$

它对任何 x 值都成立．

现在，在含有三角比的等式中，也有三角恒等式及三角方程之分．凡是在含有三角比的等式中，不论角取什么值，等式均保持成立的是三角恒等式，如

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

另一类，如

$$\cos x=1,$$

它只对一些特定的 x 值 ($x=2k\pi$, k 为整数) 才能成立，是三角方程．

本章主要讨论三角恒等式，也介绍一些简单的三角方程．

在科学实验和各种工程技术的实践中，经常要遇到包含

三角比的各种类型的算式，往往需要利用三角恒等式才能算得结果. 因此，本章的内容是重要的，务须认真掌握，熟练应用.

第一节　同角三角比的关系

我们已经知道同角的三角比之间是有内在联系的. 最常用的关系有下面三类:

(1) 倒数关系:

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\ \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\ \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1.$$

(2) 比值关系:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(3) 勾股关系:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

以上恒等式,不仅对锐角成立,而且对任意角也成立. 现以勾股关系为例进行验证.

我们知道,在单位圆中, $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, 由于$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=y^2+x^2$, 而 $y^2+x^2=1$, 所以

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

由这个恒等式,可推得勾股关系的另一表示:

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha,\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

事实上,在 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 两边各除以 $\cos^2\alpha$, 得

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

由于 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$, $\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$, 于是

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

恒等式 $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$ 请读者自己证明.

下面举一些应用的例子.

[例 1] 已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, 求 $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值.

解：由于 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}<0$, α 是第 II 或第 III 象限角.

当 α 是第 II 象限角时,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

当 α 是第 III 象限角时,

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{5}{13},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}.$$

[例 2] 已知 $\mathrm{tg}\,\alpha=a$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的值.

解：对于第 I 象限角, 在几何部分第三章中, 已经求出用 $\mathrm{tg}\,\alpha$ 表示 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的式子

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

这里要讨论的是第 II 象限角的情形. 根据勾股关系 $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$, 得

$$\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha},$$

已知 α 是第 II 象限角, 根号前应取负号, 所以

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=-\sqrt{1+a^2},$$

由于 $\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$，所以

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

根据比值关系 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$，所以

$$\sin\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

同理可推知，如果 α 是第 III 象限角，此时的结果与 α 是第 II 象限角时的结果一致；如果 α 是第 IV 象限角，则其结果与 α 是第 I 象限角时的结果一致.

有时，我们要利用已知的恒等式推导出其它的恒等式，一般的方法是由一端推导到另一端.

[例 3]　求证 $2\cos^2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

解：由右端推导到左端.

$$\begin{aligned}\text{右端}&=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha\\&=2\cos^2\alpha-1=\text{左端}.\end{aligned}$$

所以

$$2\cos^2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

[例 4]　求证 $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\csc\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$.

解：把左端的三角比全部用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 来表示.

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\&=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha=\text{右端}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\csc\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

小　结

1. 六个三角比之间的关系为

(1) 倒数关系：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

(2) 比值关系：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(3) 勾股关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

2. 同角的六个三角比中，知道其中一个，就可用上述关系推出其它任一个. 推算过程中如运用到勾股关系，开方时要注意符号.

习　题

1. 已知 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，并且 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，求 $\cos\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$，并且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\sin\alpha$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=K$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：

$$\sec\alpha=\sqrt{1+K^2},\quad \csc\alpha=\frac{1}{K}\sqrt{1+K^2}.$$

4. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-1.4$，并且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

5. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{5}$，并且 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

6. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=-3$，并且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

7. 已知 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$，求 $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$ 的值.

8. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$，求 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

9. 化简下列各题:

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$; (2) $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

(3) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; (4) $1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

(5) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; (6) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

10. 证明下列恒等式:

(1) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$;

(2) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

(3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\csc\alpha$;

(4) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\csc\alpha}{1+\sec\alpha}=\operatorname{ctg}^3\alpha$;

(5) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

第二节 和 差 公 式

利用 α 及 β 的三角比，表示 $\alpha\pm\beta$ 的三角比的公式叫和差公式. 在这一类公式中,先证明两角差的余弦公式,再推导出其它的结果.

一、两角差的余弦公式

$\cos(\alpha-\beta)$ 是两角差的余弦，一般地说，它并不等于两个角的余弦的差. 例如

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866,$$

但

$$\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1.732-1}{2}=\frac{0.732}{2}\approx0.366,$$

所以

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\neq\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}.$$

事实上，两角差的余弦公式为

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

证明：在单位圆(图 6-1)中，作 $\angle EOB=\alpha$, $\angle EOA=\beta$，那末 $\angle AOB=\alpha-\beta$.

从 A、B 点分别作 OE 的垂线 AC, BD，再从 A 点作 BD 的垂线 AM. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，

$$AB^2=1^2+1^2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

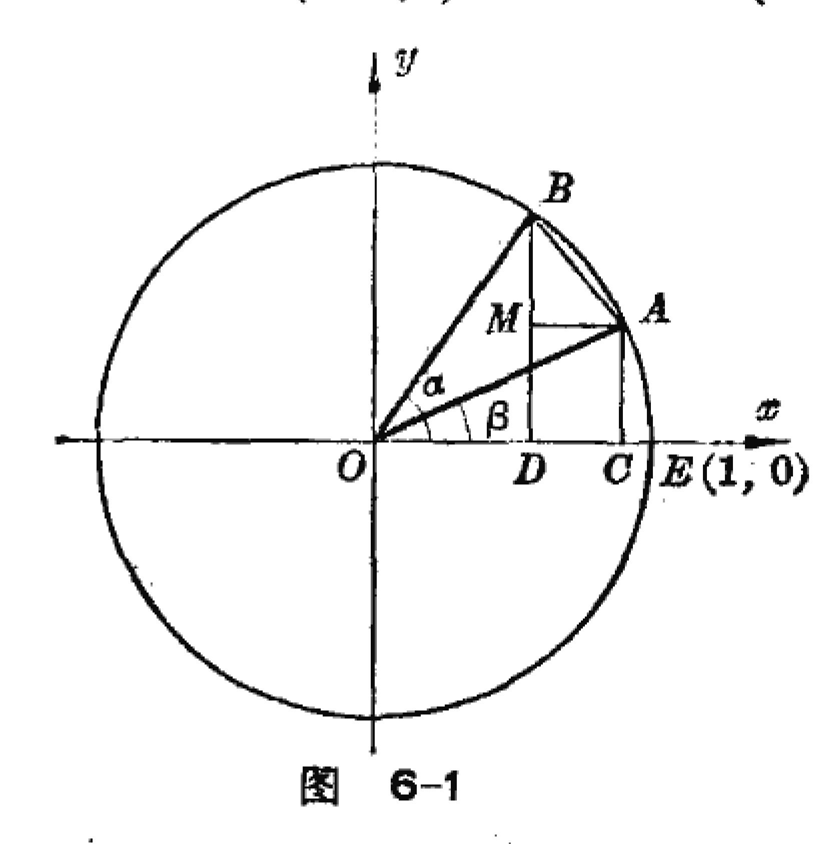


图 6-1

另一方面，在直角三角形 AMB 中

$$AB^2=MA^2+BM^2,$$

由于 $MA=DC=OC-OD$, $BM=BD-MD=BD-AC$，于是

$$\begin{aligned}AB^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha\\&\qquad-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),\end{aligned}$$

比较 AB^2 的两种表示，得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

公式(1)有很多应用，例如，可利用它求得 $\cos 15°$ 的值，而不必查表。

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

公式(1)也可用来证明前面学过的三角公式. 例如, 在公式(1)中, 令 $\alpha=0$, 便得

$$\cos(-\beta) = \cos 0 \cos\beta + \sin 0 \sin\beta = \cos\beta.$$

又如, 令 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, 便得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta.$$

二、和 差 公 式

现在列出三角比的和角公式、差角公式:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{1}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{3}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{4}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{5}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \tag{6}$$

下面我们选择几个予以证明.

证明(2). 将 $\alpha+\beta$ 写成 $\alpha-(-\beta)$, 应用公式(1)得

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)]$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

即

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

证明(3). 应用余角关系及公式(1)，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

证明(5). 应用公式(2)和(3)，得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

把上式右边的分子和分母都除以 $\cos\alpha\cos\beta$，就得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}},$$

代进比值关系，得到

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

其余的公式，请读者自己证明.

在和差公式里，如果其中有一个角为特殊角，将可得到一些常见的特例.

[例 1] 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，证明下列一组恒等式：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\beta;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\operatorname{ctg}\beta.$$

证：因为 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，应用和角公式，得到

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\beta+\cos\frac{\pi}{2}\sin\beta=\cos\beta;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=-\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}=\frac{\cos\beta}{-\sin\beta}=-\operatorname{ctg}\beta.$$

作为练习，请读者证明另外一组恒等式：

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\cos\beta;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta.$$

[例 2]　已知　$\cos\alpha=\frac{4}{5}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\right)$，

$$\cos\beta=\frac{5}{13}\quad\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right),$$

求 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

解：因为 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，而 α 在第 IV 象限，所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

因为 $\cos\beta=\frac{5}{13}$，而 β 在第 I 象限，所以

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}.$$

于是

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{63}{65}.$$

[例 3] 用两角和的正弦表示下式:

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

解: 根据题意,就是要找出一个角 β, 使

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta).$$

运用和角公式,上式即

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

比较等式两端可见,只要找一个同时满足

$$\frac{1}{2}=\sin\beta,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\beta$$

的角 β 就可以了.

显然, $\beta=\frac{\pi}{6}$ 适合这两个等式, 于是

$$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).$$

[例 4] 用两角和的正弦表示下式:

$$2\sin\alpha+\cos\alpha.$$

解: 这里我们不可能直接把 2 和 1 分别写成同一个角 β 的余弦和正弦, 但可以按照如下方式进行.

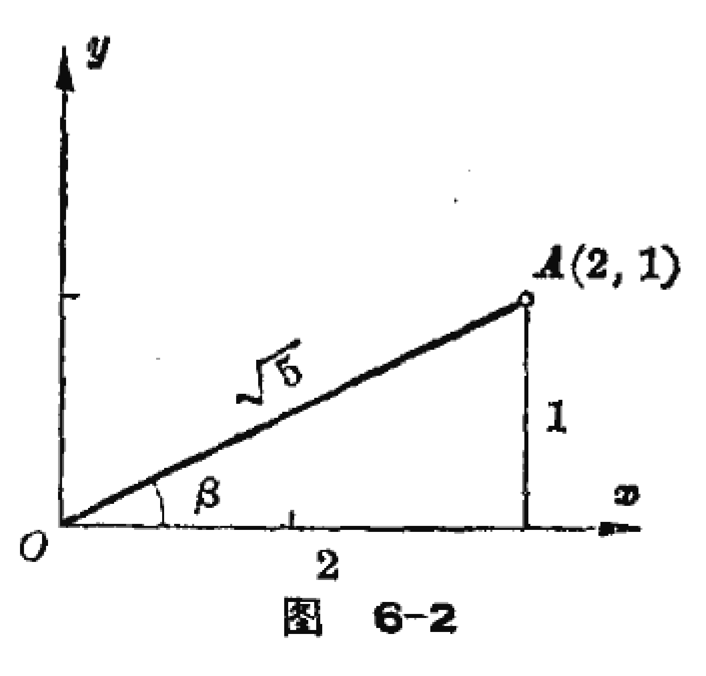


图 6-2

设某一角 β 的终边上有一点 A, 它的坐标是 $(2, 1)$ (图

6–2)．A 点到原点的距离 $AO=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，于是这个角 β 就适合

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因为 $\cos\beta$ 与 $\sin\beta$ 全为正数，所以 β 是第 I 象限角，查表得 $\beta=26°34'$，因而

$$\begin{aligned}2\sin\alpha+\cos\alpha&=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)\\&=\sqrt{5}\,(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\\&=\sqrt{5}\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{5}\sin(\alpha+26°34').\end{aligned}$$

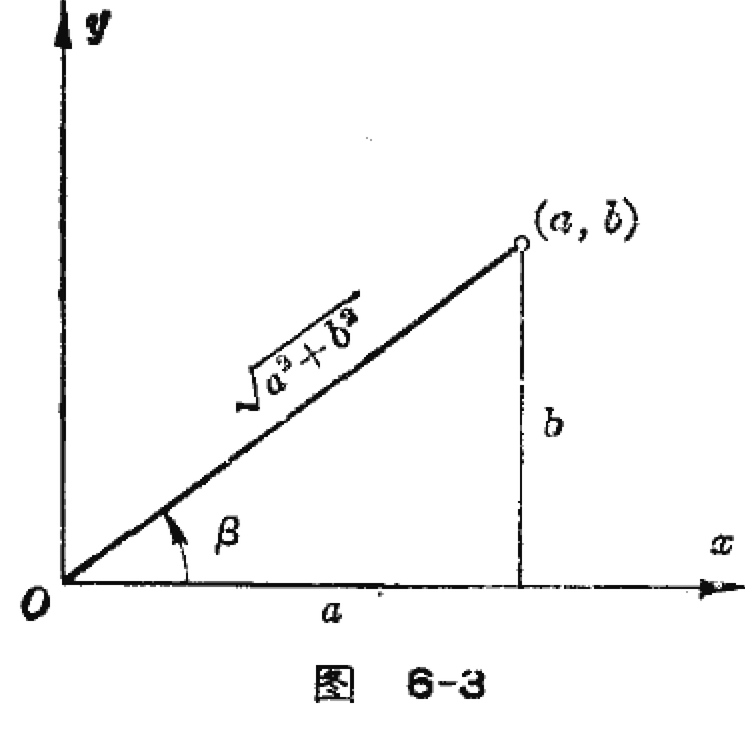


图 6-3

一般地说，$a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 都可以化成 $A\sin(\alpha+\beta)$ 的形式.

首先把 a 和 b 看做某一辅助角 β 终边上一点的坐标(图 6-3)，求出这点到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2}$，然后取 β 的一个值使同时适合

$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}a\sin\alpha+b\cos\beta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

这种变形在电工学中很有用处.

小　结

1. 和角公式、差角公式为

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

由 $\cos(\alpha-\beta)$ 的公式可推得其它公式.

2. $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 可化为 $A\sin(\alpha+\beta)$ 的形式，其中

$$A=\sqrt{a^2+b^2},$$

β 由下面两式决定:

$$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

习　　题

1. 不用查表求下列各式的结果:

(1) $\cos(36°+\alpha)\cos(54°-\alpha)-\sin(36°+\alpha)\sin(54°-\alpha)$;

(2) $\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$;

(3) $\dfrac{1+\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}15°}$.

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\sin\beta=\dfrac{8}{17}$, 且 α 和 β 都是锐角，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$, 且 α 是第 II 象限角，β 是第 III 象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

4. 已知 $\sin\alpha=0.6$, $\sin\beta=0.8$, 且 α 是第 I 象限角，β 是第 II 象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

5. 已知 $\sin\alpha=0.625$, $\sin\beta=0.8$, 求 $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

6. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$，$\operatorname{tg}\beta=-2$，求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$，$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$ 的值.

7. 设 α 与 β 为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，求 $\cos\beta$ 的值.

8. 已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，并且 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$，并且 α 与 β 为锐角. 求证 $\alpha+\beta=45°$.

10. 用 α，β，γ 的正弦与余弦来表示 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ 与 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

11. 求证下列恒等式:

(1) $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$；　(2) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$；

(3) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$；

(4) $\operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$；

(5) $\sin(45°+\alpha)-\cos(45°-\alpha)=0$；

(6) $\cos\alpha+\cos(120°-\alpha)+\cos(120°+\alpha)=0$.

12. 将下列各式化为 $a\sin\omega t+b\cos\omega t$ 的形式:

(1) $5\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$；　(2) $6\sin\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)$；

(3) $7\sin\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $4\sin(2t+32°)$.

13. 将下列各式化为 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 的形式:

(1) $2\sin 4t+3\cos 4t$；　(2) $4\sin 3t+5\cos 3t$；

(3) $4\sin 3t-5\cos 3t$；　(4) $-4\sin 3t-5\cos 3t$.

第三节　倍角公式与半角公式

一、倍 角 公 式

在两角和的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

中，令 $\beta=\alpha$，那么

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

同样，由两角和的余弦公式可得

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

由于 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，在上面的公式中如用 $1-\sin^2\alpha$ 代 $\cos^2\alpha$ 或用 $1-\cos^2\alpha$ 代 $\sin^2\alpha$，经过整理，又可得出以下两种形式：

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

由两角和的正切公式得出

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

这组公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

是用一个角的三角比，表示二倍角的三角比，称为倍角公式。

[例 1] 已知 $\cos\alpha=-0.6$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\operatorname{tg} 2\alpha$ 的值。

解：利用勾股关系和比值关系得

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\pm\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\mp\frac{4}{3}.$$

因为 $\cos\alpha=-0.6=-\frac{3}{5}<0$，可知 α 是第 II 或第 III 象限角，于是

(1) 当 α 是第 II 象限角时，$\sin\alpha$ 取正值，$\operatorname{tg}\alpha$ 取负值，

应用倍角公式得

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}.$$

(2) 当 α 是第 III 象限角时, $\sin\alpha$ 取负值, $\operatorname{tg}\alpha$ 取正值, 应用倍角公式得

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{24}{7}.$$

运用倍角公式,可以将角 2α 的三角比用角 α 的三角比表示,也可以将角 α 的三角比用角 $\frac{\alpha}{2}$ 的三角比表示。应根据具体情况,灵活使用.

[例 2]　设 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$, 证明用 t 表示 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 的式子分别是

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{2t}{1-t^2}.$$

证: 把 θ 看作 $2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, 利用倍角公式, 得

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

由于

$$\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1,\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

得

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

把 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$ 代入，得到

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}.$$

同样，由 $\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$，可得

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

应用二倍角的正切公式，直接得到

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2t}{1-t^2}.$$

[例 3] 用 $\sin\alpha$ 表示 $\sin 3\alpha$.

解：

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

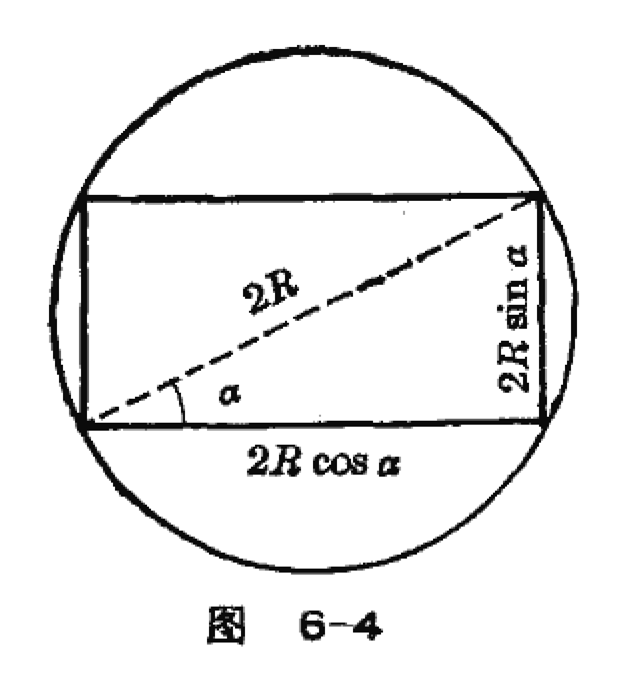


图 6-4

［例 4］ 圆木半径为 R,问如何切取,可得截面积最大的长方形断面?

解:这个问题就是要在圆的内接长方形中,找一个面积最大的. 我们知道,圆的内接长方形的对角线必是圆的直径,其长等于 $2R$. 设长方形对角线和一底边的夹角为 α (图 6-4),内接长方形的面积 S 随 α 变化,这里的问题就是问 α 取什么数值的时候 S 为最大.

从图 6-4 可知,长方形的相邻两边的长分别为 $2R\cos\alpha$ 与 $2R\sin\alpha$,因此

$$
\begin{aligned}
S &= 2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\alpha \\
&= 2R^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 2R^2\sin 2\alpha.
\end{aligned}
$$

$\sin 2\alpha$ 的最大值是 1,所以当 $\sin 2\alpha=1$ 时面积 S 最大,此时,$2\alpha=90°$,即

$$\alpha=45°.$$

所以,在圆内接长方形中以正方形面积为最大.

二、半角公式

现在介绍半角公式,2α 是 α 的倍角,α 就是 2α 的半角,因此,在倍角公式中,通过解方程的方法,就能得到半角公式.

我们已经知道,二倍角的余弦公式 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 也可表示为

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

把 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 看作未知数,解这个方程,得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

同样,由 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ 可得

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

再由 $\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ 得到

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

这组公式:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

是用一个角的三角比来表示这个角的一半的三角比,称为半角公式.

公式中两根的取舍,应根据 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限来决定.

[例 5] 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ 且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, 求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值.

解: $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, 所以 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, 即 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第 II 象限内. 于是

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=-\frac{1}{2}.$$

[例 6]　求证 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证：$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

[例 7]　已知 $\operatorname{ctg}2\theta=2\sqrt{2}$ 且 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，求 $\sin\theta$.

解：首先把 $\sin\theta$ 用 2θ 的三角比表示. 应用半角公式，得

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}},$$

这里，因 $\sin\theta$ 在 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 为正，所以根号前取正号.

进一步，把 $\cos 2\theta$ 用 $\operatorname{ctg}2\theta$ 表示，由于 2θ 在第 I 象限，$\cos 2\theta$ 为正，所以

$$\cos 2\theta=\frac{1}{\sec 2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}}=\frac{\operatorname{ctg}2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}}.$$

把 $\operatorname{ctg}2\theta=2\sqrt{2}$ 代入，得

$$\cos 2\theta=\frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\theta}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}}=\frac{\sqrt{18-12\sqrt{2}}}{6}.$$

小　　结

1．倍角公式：

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$；

$\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2．半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

习　　题

1．(1) 已知 $\sin\alpha=0.8$，求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$ 的值；

(2) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-3$，求 $\operatorname{tg} 2\alpha$ 的值.

2．已知等腰三角形底角的正弦等于 $\frac{5}{13}$，求顶角的正弦及余弦.

3．已知 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$，且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\sin 2\alpha$ 与 $\cos 2\alpha$ 的值.

4．已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值.

5．已知 $\cos\alpha=\frac{119}{169}$，且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值.

6. 已知 $\cos 2\alpha=-\frac{15}{17}$，且 $\pi<2\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

7. 已知 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$，求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

8. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$，求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 和 $\operatorname{tg}2\alpha$ 的值.

9. 已知圆心角的正弦等于 $\frac{3}{5}$，求同弧的圆周角的正弦、余弦和正切.

10. 求证下列恒等式:

(1) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;　　(2) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\operatorname{tg}\theta$;

(3) $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;　　(4) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$;

(5) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$;　　(6) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha$;

(7) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;　　(8) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

第四节　积化和差与和差化积

一、积化和差公式

下面的一组公式:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

称为积化和差公式，这里只推导第一式. 我们知道,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

两式相加，得到

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

于是

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

这就证明了第一式.

用类似方法可以推出其它两式.

当$\alpha=\beta$时，得到一组积化和差的特例：

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

这组公式在高等数学的积分计算中经常要用到.

例如，把$2\sin A\cos 3A$化成和差的形式，得

$$\begin{aligned}2\sin A\cos 3A&=2\times\frac{1}{2}[\sin(A+3A)+\sin(A-3A)]\\&=\sin 4A-\sin 2A.\end{aligned}$$

又如，把$\sin x\cos^3 x$化成和差的形式，得

$$\begin{aligned}\sin x\cos^3 x&=\sin x\cos x\cdot\cos^3 x\\&=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\\&=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x\\&=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x.\end{aligned}$$

二、和差化积公式

下面的一组公式：

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

称为和差化积公式，这里只推导第一式.

在积化和差公式

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

中，令 $A=\alpha+\beta$；$B=\alpha-\beta$，则 $\alpha=\frac{A+B}{2}$；$\beta=\frac{A-B}{2}$，代入上式，得

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

这就是所要证明的. 用类似方法可推导其它三个等式.

[例 1] 证明恒等式：

$$\cos\alpha-\cos 3\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

证：应用和差化积的公式，我们有

$$\text{左端}=-2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}=-2\sin 2\alpha\sin(-\alpha)$$

$$=2\sin 2\alpha\sin\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha,$$

公式得证.

[例 2] 求 $\frac{\sin 70^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 70^\circ+\cos 10^\circ}$ 的值.

解：
$$\frac{\sin 70^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 70^\circ+\cos 10^\circ}=\frac{2\cos\frac{70^\circ+10^\circ}{2}\sin\frac{70^\circ-10^\circ}{2}}{2\cos\frac{70^\circ+10^\circ}{2}\cos\frac{70^\circ-10^\circ}{2}}$$

$$=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

[例 3] 一交流发电机三相绕组按星形联接，如图 6-5. 在正常工作时，三导线 AA'、BB'、CC' 的电流强度分别是:

$$I_A = I\sin\omega t,$$
$$I_B = I\sin(\omega t + 120°),$$
$$I_C = I\sin(\omega t + 240°).$$

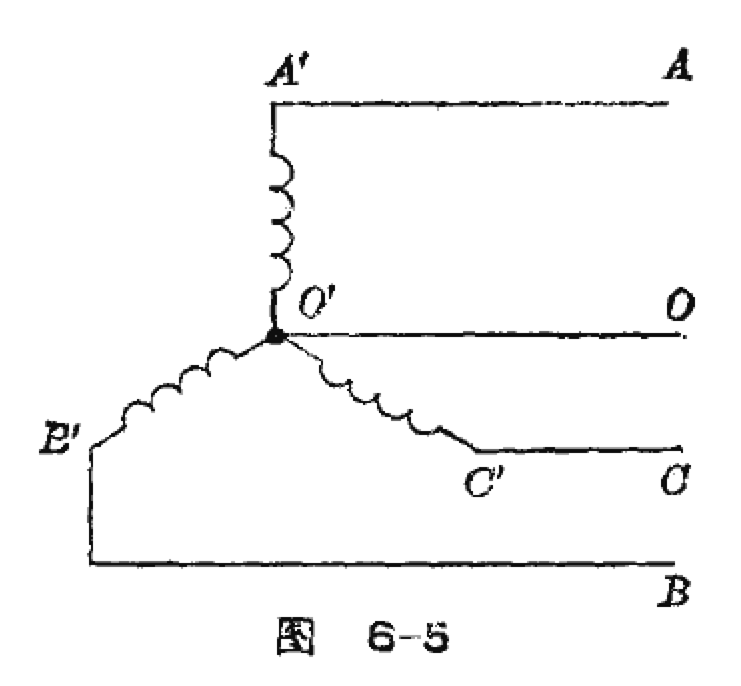


图 6-5

求证这时中线 OO' 不通过电流，即

$$I_A + I_B + I_C = 0.$$

证明: 只需证明 $I_B + I_C = -I_A$. 利用和差化积公式，有

$$\begin{aligned} I_B + I_C &= I\sin(\omega t + 120°) + I\sin(\omega t + 240°) \\ &= I\left[2\sin\frac{\omega t + 120° + \omega t + 240°}{2}\cos\frac{\omega t + 120° - \omega t - 240°}{2}\right] \\ &= 2I\sin(\omega t + 180°)\cos(-60°) \\ &= I\sin(\omega t + 180°) = -I\sin\omega t = -I_A, \end{aligned}$$

即

$$I_A + I_B + I_C = 0.$$

习　　题

1. 把下列各式化为乘积的形式:

(1) $\sin 80° + \sin 30°$;　　(2) $\cos 72° - \cos 48°$;

(3) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 70°$.

2. 把下列各式化为乘积的形式:

(1) $\sin 3\alpha - \sin\alpha$;　　(2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

(3) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$;　　(4) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

3. 利用积化和差公式求下列各式的值:

(1) $\cos 75°\cos 15°$;　　(2) $\sin 45°\sin 15°$;　　(3) $\sin 45°\cos 15°$.

4. 将下列各式化为和差的形式:

(1) $\sin\alpha\cos2\alpha$;　　(2) $\sin3\alpha\sin\alpha$;

(3) $2\sin\alpha\cos^2\alpha$.

5. 求证下列各恒等式:

(1) $\dfrac{\sin3x-\sin x}{\cos x-\cos3x}=\operatorname{ctg}2x$;　　(2) $\cos3\alpha-\cos7\alpha=2\sin5\alpha\sin2\alpha$;

(3) $\cos\alpha-\cos3\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha$;

(4) $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin2\alpha\sin2\beta$;

(5) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

第五节　简单的三角方程

含有未知数的三角比的方程叫做三角方程. 例如

$$\cos^2x=4\cos x-2,$$

$$\sin5x-\sin4x=0$$

都是三角方程.

由于一个三角比的值对应着无穷多个角, 因此三角方程一般都有无数个解, 我们把解的一般表示称为这个方程的通解.

现在从最简单的三角方程 $\operatorname{tg}x=a$, $\sin x=a$, $\cos x=a$ 的解法讲起.

一、最简单的三角方程

对于

$$\sin x=a,\quad \cos x=a,\quad \operatorname{tg}x=a$$

这类方程,我们并不陌生. 解这类方程,实际上就是已知三角比求角, 因此, 在复习的基础上, 将它们的求解方法归结如下:

(1) $\operatorname{tg} x=a$ 的通解.

先看 $a=-1$ 的情形，即求解方程

$$\operatorname{tg} x=-1.$$

这个方程有一个解是 $-\frac{\pi}{4}$.

由于正切的周期是 π，因此，方程的通解是

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4} \quad (k \text{ 是整数}).$$

当 a 为任意实数时，方程 $\operatorname{tg} x=a$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上总有一个解，这个解就是 $\operatorname{arc\,tg} a$，所以方程 $\operatorname{tg} x=a$ 的通解是

$$x=k\pi+\operatorname{arc\,tg} a \quad (k \text{ 是整数}).$$

(2) $\sin x=a$ 的通解.

我们知道，当 $|a|\leqslant 1$ 时，方程 $\sin x=a$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上总有一个解，这个解就是 $\arcsin a$，在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的另一个解是 $\pi-\arcsin a$，因此，方程 $\sin x=a$ 的通解是

$$x=2k\pi+\arcsin a \text{ 和 } x=(2k+1)\pi-\arcsin a \quad (k \text{ 是整数}).$$

由于 $|\sin x|\leqslant 1$，当 $|a|>1$ 时方程 $\sin x=a$ 没有解.

(3) $\cos x=a$ 的通解.

当 $|a|\leqslant 1$ 时，方程 $\cos x=a$ 在 $[0, \pi]$ 上有一个解，这个解就是 $\arccos a$，在 $(-\pi, 0)$ 上的另一个解是 $-\arccos a$，因此方程 $\cos x=a$ 的通解是

$$x=2k\pi\pm\arccos a \quad (k \text{ 是整数}).$$

当 $|a|>1$ 时，方程 $\cos x=a$ 没有解.

上面得到了最简单三角方程的通解. 以后解三角方程时，只要把它化成最简单的三角方程，应用上面的结果，就可以求出方程的通解.

二、一些简单的三角方程的解法

下面，举例说明解某些简单的三角方程所常用的方法.

[例 1] 解方程

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.$$

解：我们知道 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$，把 $x+\frac{\pi}{6}$ 看作未知数，那么

$$x+\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},$$

所以，解为

$$x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k\text{ 是整数})$$

和

$$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\quad (k\text{ 是整数}).$$

[例 2] 解方程

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+1=0.$$

解：$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=-1.$

由于 $\operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$，把 $x+\frac{\pi}{8}$ 看作未知量，便有

$$x+\frac{\pi}{8}=k\pi-\frac{\pi}{4},$$

于是

$$x=k\pi-\frac{3\pi}{8}\quad (k\text{ 是整数}).$$

[例 3]　火炮射击时，在不考虑空气阻力的条件下，射程 x (米)和炮弹的初速 v (米/秒)，射角 θ (度)的关系是

$$x=\frac{v^2\sin 2\theta}{9.8}.$$

一门火炮，炮弹的初速是 700 米/秒，求射程达到 40000 米时的射角.

解：因为

$$x=\frac{v^2\sin 2\theta}{9.8},$$

所以

$$\sin 2\theta=\frac{9.8x}{v^2}.$$

把 v, x 的值代入上式，得

$$\sin 2\theta=\frac{9.8\times 40000}{700^2}=0.8.$$

由于 $\arcsin 0.8=53°8'$，解得

$$2\theta=k\cdot 360°+53°8' \text{ 和 } 2\theta=(2k+1)\cdot 180°-53°8',$$

所以

$$\theta=k\cdot 180°+26°34' \text{ 和 } \theta=(2k+1)90°-26°34'.$$

由于射角只能是锐角，取 $k=0$，得

$$\theta_1=26°34',\quad \theta_2=63°26'.$$

所以，当射角 θ 取 $26°34'$ 或 $63°26'$ 时，射程能达到 40000 米.

[例 4]　求方程 $\cos 2x+\cos x+1=0$ 在 $[0, \pi]$ 上的解.

解：由倍角公式，原方程可以化为

$$2\cos^2 x-1+\cos x+1=0,$$

整理得

$$\cos x(2\cos x+1)=0.$$

因此，它的解由

$$\cos x=0 \text{ 和 } 2\cos x+1=0$$

的解组成.

因为限定 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 的范围，由 $\cos x=0$ 得

$$x_1=\frac{\pi}{2}.$$

由 $2\cos x+1=0$，即 $\cos x=-\frac{1}{2}$，得

$$x_2=\frac{2\pi}{3}.$$

所以，方程的解是 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{2\pi}{3}$.

[例 5]　解方程 $\sin 4x+\sin x=0$.

解：利用和化为积的公式，得

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0,$$

即

$$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

$\sin\frac{5x}{2}=0$ 的通解是 $\frac{5x}{2}=2k\pi$ 和 $\frac{5x}{2}=(2k+1)\pi$，可统一写成

$$\frac{5x}{2}=k\pi,\quad x=\frac{2k\pi}{5}\quad (k \text{ 是整数}).$$

$\cos\frac{3x}{2}=0$ 的通解是 $\frac{3x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，可统一写成

$$\frac{3x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{3}\quad (k \text{ 是整数}).$$

所以方程的解是

$$x=\frac{2k\pi}{5}\quad \text{和}\quad x=(2k+1)\frac{\pi}{3}\quad (k \text{ 是整数}).$$

[例 6] 照明弹在平面目标的斜上方时 (图 6-6), 照明的效果跟照射角有密切的关系. 在不考虑空气影响的条件下, 如果照射角 β 能够使方程

$$2\cos^2\beta-\sin^2\beta=0$$

成立, 那么照明效果最好. 求照明效果最好的照射角.

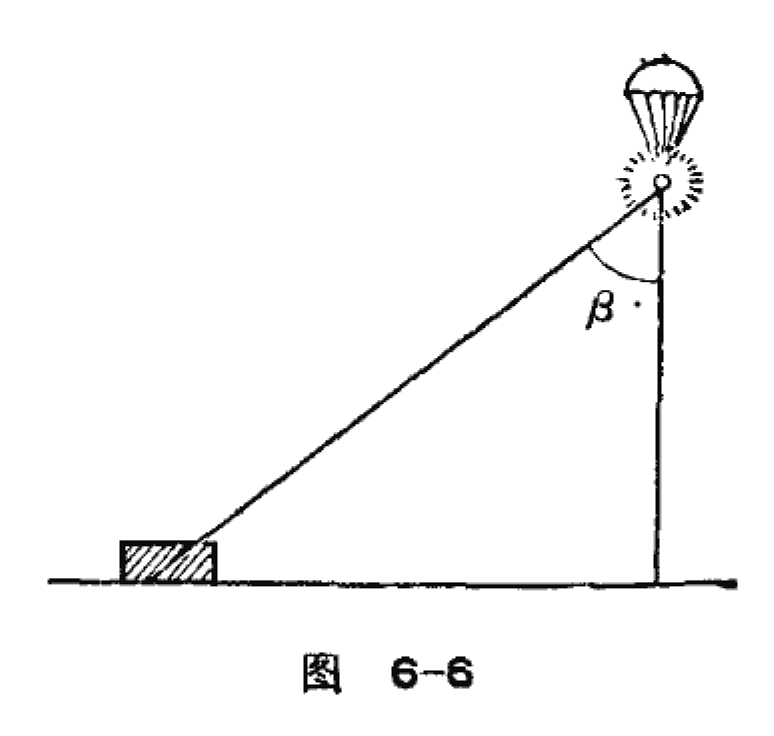


图 6-6

解: 根据勾股关系, 原方程可以化成

$$2\cos^2\beta-(1-\cos^2\beta)=0.$$

经整理得 $\cos^2\beta=\frac{1}{3}$, 即

$$\cos\beta=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0.5773.$$

由于 $\arccos(0.5773)=54°45'$, $\arccos(-0.5773)=180°-54°45'=125°15'$, 所以通解为

$\beta=k\cdot 360°\pm 54°45'$ 和 $\beta=k\cdot 360°\pm 125°15'$ (k 是整数).

但照射角只能是锐角, 所以取 $\beta=54°45'$.

因此, 照明效果最好的照射角是 $54°45'$.

[例 7] 解方程

$$6\sin x+8\cos x=5.$$

解: 方程左边是 $a\sin x+b\cos x$ 的形式, 先把它化成 $A\sin(x+\beta)$.

$$6\sin x+8\cos x=\sqrt{6^2+8^2}\left(\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}\sin x+\frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}\cos x\right),$$

记

$$\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}=\cos\beta,\quad \frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}=\sin\beta,$$

适合以上两式的角 $\beta=53°8'$，因此

$$6\sin x+8\cos x=10(\cos\beta\sin x+\sin\beta\cos x)$$
$$=10\sin(x+53°8').$$

把此式代入方程，得 $10\sin(x+53°8')=5$，即

$$\sin(x+53°8')=\frac{1}{2}.$$

由于 $\arcsin\frac{1}{2}=30°$，因此

$$x+53°8'=k\cdot360°+30° \quad 和 \quad x+53°8'=k\cdot360°+150°,$$

所以，解为

$$x=k\cdot360°-23°8' 和 x=k\cdot360°+96°52' \quad (k 是整数).$$

习　　题

1. 写出下列各三角方程的通解:

(1) $\sin x=0$,　$\sin x=1$,　$\sin x=-1$;

(2) $\cos x=0$,　$\cos x=1$,　$\cos x=-1$;

(3) $\mathrm{tg}\, x=0$.

2. 求下列各三角方程的通解:

(1) $\sin x=\sin\frac{5\pi}{4}$;　　(2) $2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{2}$;

(3) $2\sin\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=1$;　　(4) $\mathrm{tg}^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=3$;

(5) $3\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}$;　　(6) $\cos^2 x+3\sin x=3$;

(7) $3+2\cos x=4\sin^2 x$;　　(8) $\cos^2 2x=\cos 2x$;

(9) $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$;　　(10) $\mathrm{tg}^2 2x-2\mathrm{tg}\, 2x=3$;

(11) $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$;　　(12) $\cos 2x=\cos x$;

(13) $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0$;　　(14) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$;

(15) $5\sin x+2\cos x=5$.

复 习 题

1. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{15}{8}$，求角 α 的其它三角比的值.

2. (1) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$ 的值;

   (2) 已知 $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，求 $\operatorname{tg}\beta$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，求证方程 $2x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两个根是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

4. 化简:

   (1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)$;

   (2) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

5. (1) 已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$的值;

   (2) 已知 $\cos x=0.5$，　$\sin y=-0.4$，
   $270°<x<360°$，　$180°<y<270°$，
   求 $\sin(x-y)$ 和 $\cos(x+y)$ 的值.

6. 一个三角形的两个内角的正切分别是2和3，求第三个内角的正切.

7. 灯泡的电功率 P 等于灯泡的电压和电流的积. 如果灯泡的电压是 $V\sin\omega t$，电流是 $I\sin\omega t$，求证:

$$P=\frac{1}{2}VI-\frac{1}{2}VI\cos 2\omega t.$$

8. (1) 已知 $\operatorname{ctg}2\theta=-\dfrac{3}{4}$，并且 $\dfrac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值;

   (2) 已知 $\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$，并且 $45°<\alpha<90°$，求 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 的值.

9. 已知 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，求证:

$$\cos 36°+\cos 108°=\frac{1}{2}.$$

10. 把下列各式化为乘积的形式:

    (1) $\sqrt{2}-2\cos A$;　　(2) $\cos 3x-\cos 2x+\cos x$.

11. 求下列各三角方程的通解:

    (1) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$;　　(2) $4\sin x(1-\sin x)=1$;

    (3) $\sin 5x=\sin 4x$;　　(4) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$.

附表　三角公式

一、基本公式:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

二、和角公式,差角公式:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

三、倍角公式:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

四、半角公式:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

五、积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

六、和差化积公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

第七章　初等函数

一切事物都处在运动之中．在一个运动过程里，各个变化的数量之间都存在着依存关系，数学上称为函数关系．在这一章中，我们将引进函数概念和讨论几个初等函数．

第一节　函数的概念

一、函数的概念

就一个运动过程的数量侧面来说，有些量在运动过程中，保持着相对稳定的数值，称为常量或常数，有些量在运动过程中取不同的数值，称为变量或变数．例如，在机床加工零件的某一过程中，电动机的转速保持不变，是常量，而工件的体积和重量随切削的时间而变化，它们都是变量．又如在匀速运动中，速度可看作是个常量，而时间在变化，距离也随之而变化，因此，时间和距离是变量．对于圆来说，随着直径的不同，周长也相异，但是，圆周长与直径的比值——圆周率总是3.14159…，这是我们熟知的常量 π，而直径与圆周长都是变量．

常量和变量不是绝对的．同一个量在某种条件下是常量，而在另一种条件下，就可能是变量．象气温变化能使机器上的轴热胀冷缩，对于一般机器来说，轴长发生的微小变化可忽略不计，轴长看作是常量；而在精密的机器上，微小的变化

也会影响精密度，所以轴长就看成是变量，以便估计它对精密度的影响．一般地说，一个量，在研究的过程中其变化对于实际需要来讲可忽略不计时，就可把它看作是常量．

下面举几个具体实例来研究变量之间的依存关系．

[例 1]　某飞机以每小时 800 公里的速度飞行．在这个过程中，速度 800 公里/小时是一个常量，航程随时间而变化，航程 s 与时间 t 是两个变量．变量 s 与 t 有下面关系：

$$s=800t.$$

根据这个关系，t 取一个值，s 的值就由这个公式而确定．如 $t=0.5$ 小时，$s=400$ 公里；$t=1$ 小时，$s=800$ 公里．所以这个式子反映了变量 s 与变量 t 之间的依存关系．

[例 2]　通过科学实验得知，常见的保险丝（铅锡合金，铅 75%、锡 25%），它的额定电流 i 和直径 D 的数量关系，可列成下表：

额定电流 i（安培）	2	2.3	2.6	3.3	4.1	4.8	7
保险丝直径 D（毫米）	0.51	0.56	0.61	0.71	0.81	0.92	1.22

从表看出，保险丝的直径要随额定电流的大小来确定．对于电路中不同的额定电流，就要用相应的保险丝．如额定电流为 2.3 安培，就要选用直径为 0.56 毫米的保险丝，额定电流为 4.1 安培，就要 0.81 毫米的保险丝．保险丝直径 D 与额定电流 i 是两个变量，上面的表正好反映了这两个变量之间的依存关系．

[例 3]　某地汽车司机总结出在相同的客观条件下，行车耗油量与速度之间的关系．这个关系如图 7-1 所示．

在这里，耗油量与速度是两个变量，图中的曲线正好反映了这两个变量间的依存关系．特别是时速为 38 公里，耗油量

最小(1.8 升/小时). 掌握这个规律, 选用适当的车速, 就能节约大量汽油.

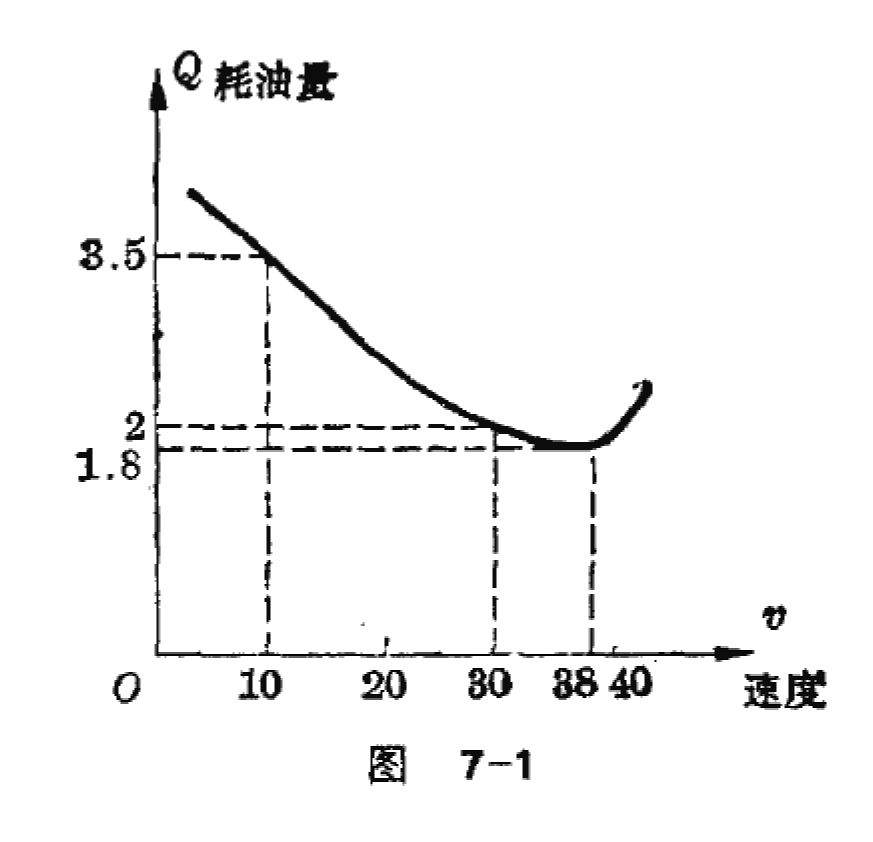


图 7-1

这三个例子, 尽管具体意义与所表现的形式各不相同, 但有着共同本质: 它们各有两个变量, 这两个变量间都有依存关系, 而且一个变量取一个特定值, 另一个变量就按照一定的规律有确定的值和它相对应. 抓住这个本质, 可以概括出函数概念.

定义 在某一运动变化过程中有两个变量 x 和 y, 变量 y 随着变量 x 一起变化. 如果变量 x 每取一个特定值, 变量 y 依照一定的规律, 总有确定的值与之对应, 那么称 y 是 x 的函数, x 是自变量, y 是因变量.

如例 1 中有两个变量: 航程与时间, 航程 s 随着时间 t 变化而变化, 当变量 t 取一个值时, 变量 s 就按照一定的规律 ($s=800t$) 有一个确定的值和它对应, 所以 t 是自变量, s 是 t 的函数. 在例 2 中, 保险丝直径 D 由电路中额定电流 i 所决定, 所以 i 是自变量, D 是 i 的函数. 例 3 中耗油量 Q 随车速 v 的变化而变化, 所以 v 是自变量, Q 是 v 的函数.

自变量取一特定的值时函数所取的对应值, 称为函数值.

二、函数的表示

函数有三种表示.

1. 用公式表示函数

如例 1 中航程 s 是时间 t 的函数, 用公式 $s=800t$ 表示.

又如，圆面积 S 是半径 r 的函数，用公式 $S=\pi r^2$ 表示．这是函数的常用表示形式，便于推理和演算．

2．用表格表示函数

如例 2 中的表以及我们熟知的平方表，三角函数表，对数表等，可直接查出自变量与函数的对应值．

3．用图象表示函数

如例 3 中的曲线以及气象自动记录图表等，可直观地看出自变量与函数的依存关系．

函数概念是一个重要概念，现在用学过的正弦来进一步阐明这个概念．在第五章中用坐标方法引进了角 α 的正弦：

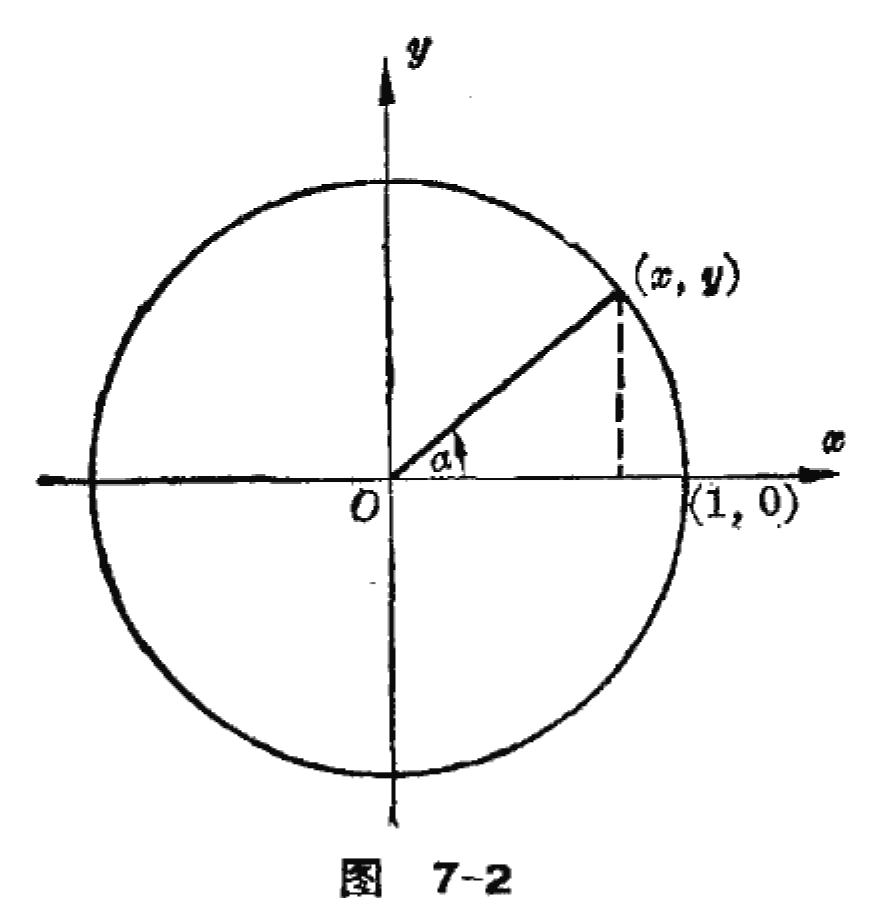


图 7-2

$$\sin\alpha=y.$$

当角 α 变动时，$\sin\alpha$ 也随之而变化（图 7-2），α 和 $\sin\alpha$ 是变量．当变量 α 取某一值时，变量 $\sin\alpha$ 就有一个确定的值与它对应．例如，α 取 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间的几个特殊值时，$\sin\alpha$ 就有确定的对应值：

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

把变量 α 记为 x，变量 $\sin x$（即 $\sin\alpha$）记为 y，得 y 与 x 的依存关系

$$y=\sin x,$$

我们称它为正弦函数.

在坐标平面上，可以直观地反映正弦函数 $y=\sin x$ 中自变量 x 与函数 y 之间的关系.

习惯上把自变量取在横轴上，函数取在纵轴上，对于每对对应值 $(x, y=\sin x)$ 在平面上就有一个确定的对应点，把各对应点顺序连接成一条光滑曲线就得到正弦函数 $y=\sin x$ 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时的图象，它是正弦函数 $y=\sin x$ 的一部分图象(图 7-3).

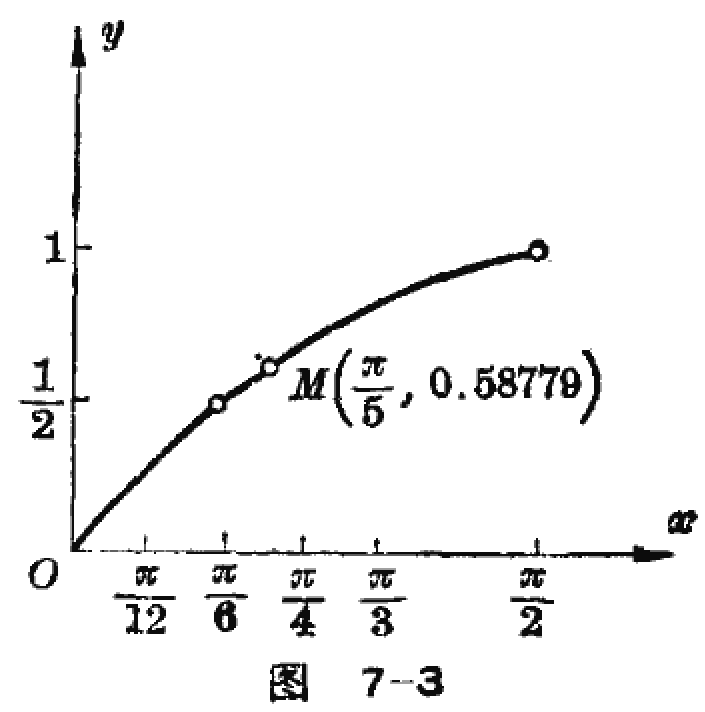


图 7-3

这个图象上的每一个点都对应着一数对 (x, y)，例如曲线上的点 M 对应于 $\left(\frac{\pi}{5}, 0.58779\right)$，即弧度为 $\frac{\pi}{5}$ 的角对应的正弦值为 0.58779，这条曲线实际上相当于一张正弦函数表.

从这条曲线也可看出，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，随着自变量 x 的增大，函数 $y=\sin x$ 的值也增大，它的值从 0 增大到 1.

由于函数与曲线建立起对应关系，我们就可以用图形直观地了解函数，又可以用函数去研究图形.

习　题

1. 下列各关系中，哪些是常量？哪些是变量？在变量中，哪些是自变量？哪些是自变量的函数？

   (1) 钢的密度 ρ 是 7.8 克/厘米^3，钢的重量 W(克) 随体积 V(立方厘米)而变化，它们之间的关系式是 $W=\rho V$;

   (2) 我国第二颗科学实验人造地球卫星绕地球一周需 106 分钟，t

分钟绕地球的周数为：$N=\frac{t}{106}$；

(3) 球的体积随半径而变化，其体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$；

(4) 将已知直径为 D 的圆周 n 等分，相邻两点间距离 s 随 n 而变化，其计算公式为 $s=D\cdot\sin\frac{180°}{n}$.

2. 试举出一些常量、变量、自变量、函数的实例.

3. 指出下列各题中哪些量是自变量、哪些是自变量的函数，并写出其函数关系式：

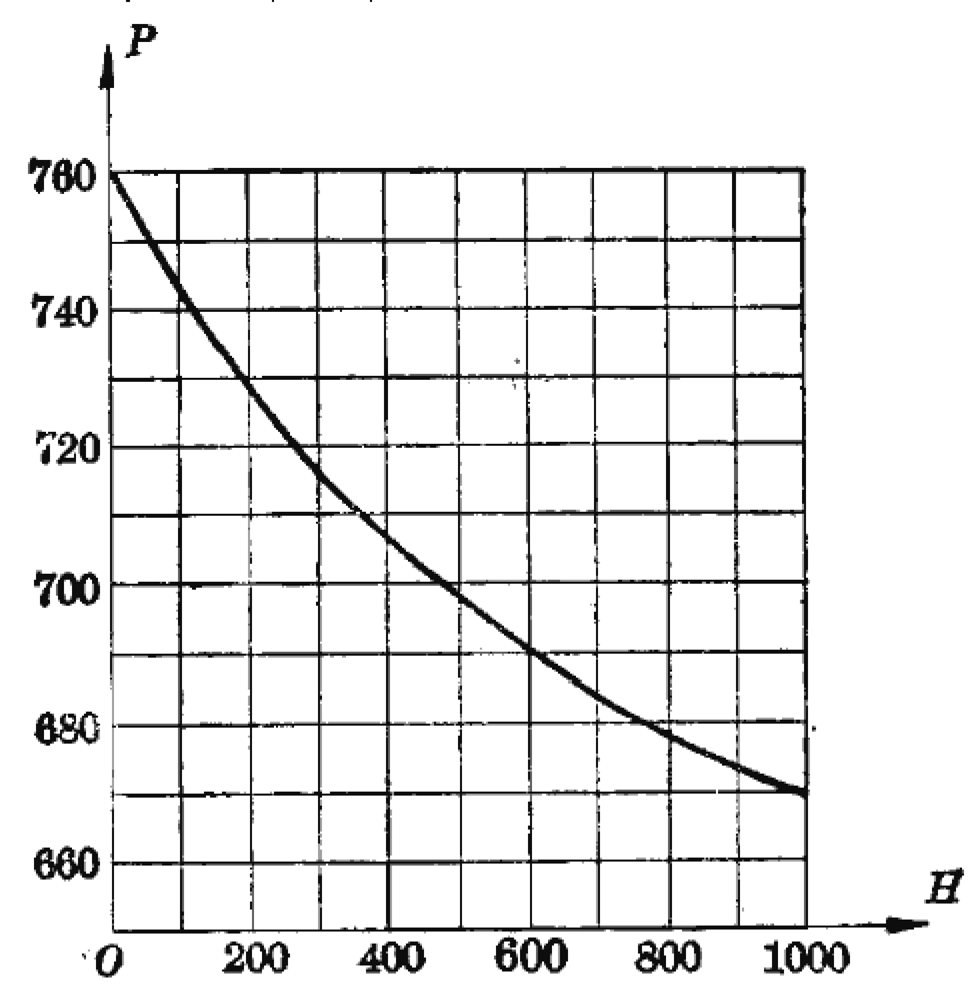
(1) 某种柴油机的主轴，每分钟转 600 转，t 分钟转 n 转；

(2) 抽水机每小时浇地 18 亩，x 小时浇地 y 亩；

(3) 汽车行驶 100 公里的路程，它的速度 v 与所用时间 t 之间关系；

(4) 一铜球在 0°C 时的体积是 100 立方厘米，温度每增加 1°C，体积增加 0.057 立方厘米，温度为 T 时，铜球的体积是 V.

4. 各种高度的大气压，如图所示，其中横轴 OH 表示离开地面的高度（米），纵轴 OP 表示气压（水银柱上的毫米数）.



(1) 从图中求出离开地面 500 米、800 米、900 米时，大气压各是多少毫米水银柱？

(2) 气压分别是 730 毫米、690 毫米水银柱时，离开地面高度各约多少米？

第二节　幂　函　数

一、正比函数 $y=kx$

有了函数概念，我们来研究正比关系，先看一个例子.

一飞机在飞行记录中，得到航程 s 和时间 t 的一些对应值：

t (时)	…	0.5	1	1.5	2	…
s (公里)	…	400	800	1200	1600	…

从这组对应值可以看出，一个量 t 扩大到原来的几倍，另一个量 s 也扩大到原来的同样倍数，这种关系是正比关系.

下面研究，成正比关系的两个变量 x, y 所满足的关系式.

设变量 x 从 x_1 变到 x_2，变量 y 对应地从 y_1 变到 y_2. 因为扩大的倍数相同，所以

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1},$$

对调外项位置得

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2},$$

这说明，成正比的两个变量的比值是一个常量，记为 k，因此得到关系式

$$\frac{y}{x}=k,$$

即

$$y=kx.$$

例如，从前面的一组对应值，可以看出航程 s 与时间 t 满

足关系

$$s=800t,$$

800 是比例常数，s 与 t 成正比关系.

又如，圆周长 l 与半径 r 满足关系

$$l=2\pi r,$$

2π 是比例常数，l 与 r 成正比关系.

上面两个例子可以归纳为，对于两个变量 x 与 y，如果满足关系

$$y=kx \quad (k\neq 0),$$

这种函数就称为正比函数，k 是比例常数.

下面作正比函数 $y=2x$ 的图象.

取自变量 x 与函数 y 的一些对应值：

x	…	-1	0	1	2	…
$y=2x$	…	-2	0	2	4	…

图 7-4

用描点法得图 7-4.

采用同样方法，还可以作出函数 $y=-2x$、$y=\frac{x}{2}$ 的图象（图 7-5）.

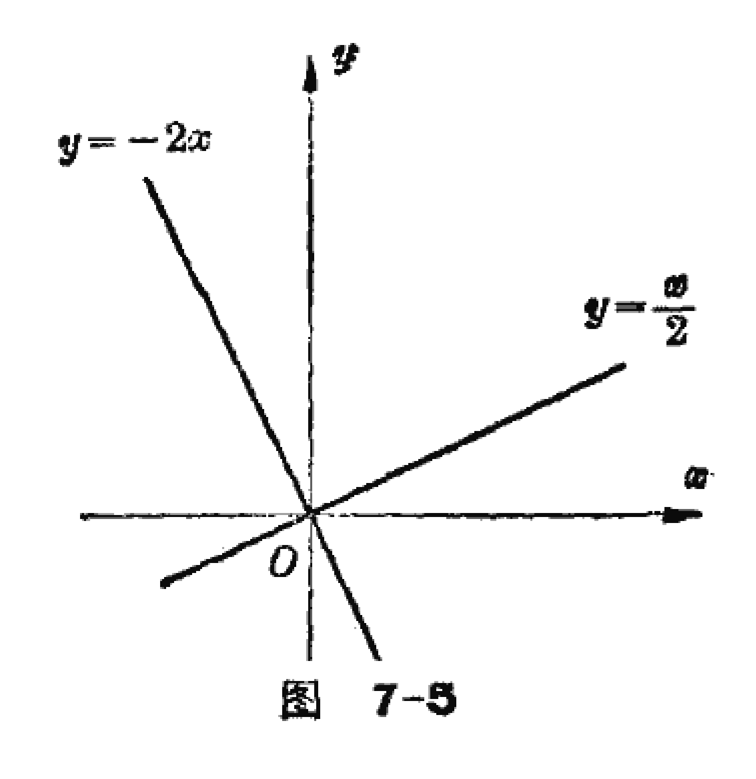


图 7-5

比较上述图象，可以看出正比函数

$$y=kx \quad (k\neq 0)$$

图象的性质：

(1) 图象是过坐标原点的一条直线.

(2) 当 $k>0$ 时，直线在第 I、第 III 象限，当 $k<0$ 时直线在第 II、第 IV 象限. k 的绝对值相等而符号相反时，两直线关于坐标轴对称.

(3) 直线的倾斜程度由比例常数 k 决定，k 的绝对值愈大，直线就愈陡.

二、反比函数 $y=\frac{k}{x}$

用函数概念来研究反比关系.

我们知道，一个变量扩大到原来的几倍，另一个变量反而缩小到原来的几分之一，这两个变量成反比关系. 使用求正比函数表达式的类似方法，可得出反比的表达式.

一般地说，如果两个变量 x, y, 满足关系

$$y=\frac{k}{x} \quad (k\neq 0),$$

这种函数就称为反比函数，k 称为比例常数.

例如，在匀速运动中，当路程 s 取一个定值时(如 $s=16$)，可以列出时间 t 和速度 v 的一些对应值:

t	…	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$v=\frac{s}{t}$	…	32	16	8	4	…

速度 v 与时间 t 满足关系

$$v=\frac{s}{t},$$

所以当 s 是常数时，$v=\frac{s}{t}$ 是一个反比函数.

又如，当导体两端电压 V 不变时，通过导体的电流 I 与导体的电阻 R 满足关系

$$I=\frac{V}{R},$$

所以$I=\frac{V}{R}$是反比函数.

下面作反比函数$y=\frac{1}{x}$的图象.

自变量x不能取零值. 这里算出一些对应值:

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=\frac{1}{x}$	…	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	…

用描点法得函数$y=\frac{1}{x}$的图象如图 7-6.

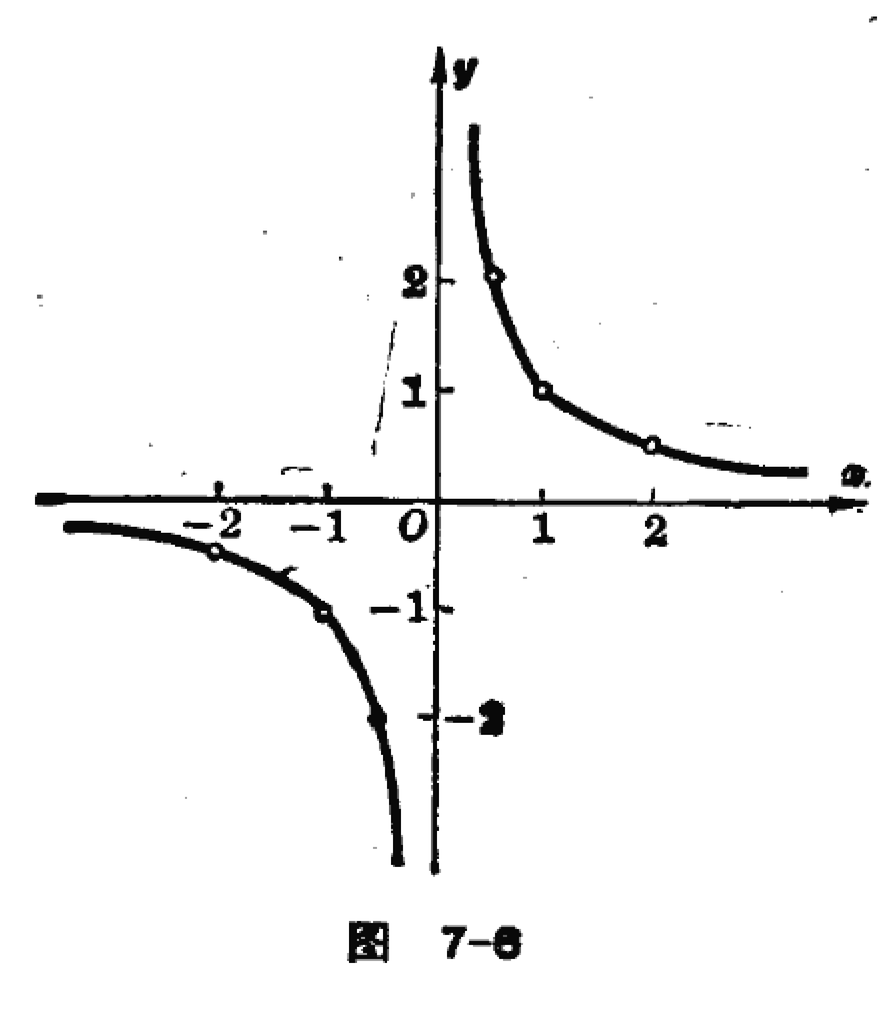


图 7-6

这个图象是由两支互不相交的曲线组成，曲线关于坐标原点对称，一支在第I象限，另一支在第III象限.曲线无限地接近于坐标轴，但永不相交. 这种曲线通常称为双曲线.

请读者作出函数$y=-\frac{1}{x}$的图象并与$y=\frac{1}{x}$的图象相比较.

具体问题应具体分析，象前面提到的$v=\frac{s}{t}$ (s为定值)的图象，当s取16时，由于时间t取正值，曲线全部落在第I象限内.

三、函数 $y=ax^2$

再讨论一种简单的函数关系.

我们知道，圆面积S与半径r的关系是

$$S=\pi r^2,$$

这里，圆周率π是常数，圆面积S随半径r而变化，当r取某一值时，S按规律$S=\pi r^2$有一个确定的对应值，所以变量S是r的函数.

又如，一个静止的物体在重力作用下自由下落，下落的路程s与时间t的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

这里，重力加速度$g=9.8$(米/秒^2)，路程s随着时间t而变化，当t取某一值时，s就按规律$s=\frac{1}{2}gt^2$有一个对应值，所以变量s是变量t的函数.

这两个例子的物理意义虽然不同，但是从数量关系上可以归纳为同一形式的函数

$$y=ax^2 \quad (a\neq 0).$$

现在讨论这个函数的图象.

在同一坐标平面上作出函数$y=x^2$和$y=\frac{x^2}{2}$的图象.

列出变量x和y的一些对应值:

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x^2$	…	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	…
$y=\frac{x^2}{2}$	…	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	…

描点得图 7-7.

同样地可作出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象，如图 7-8.

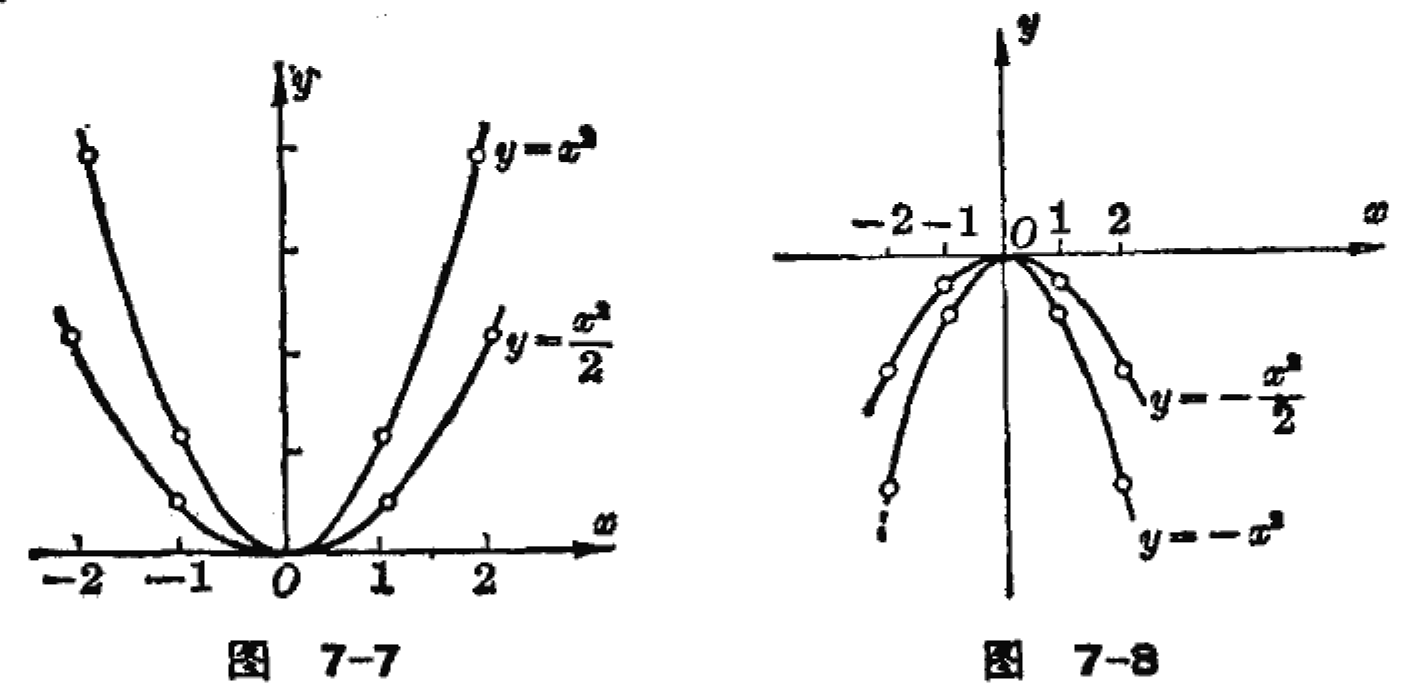


图 7-7　　　　图 7-8

这里看出函数 $y=ax^2$ 的图象性质：曲线关于 y 轴对称. 当 $a>0$ 时，曲线在 x 轴上方，当 $a<0$ 时，曲线在 x 轴下方. a 的绝对值愈大，曲线愈陡（即开口愈小）. 坐标原点是曲线与其对称轴的交点，称为曲线的顶点.

函数 $y=ax^2$ 的图象叫做抛物线，例如，向前上方抛掷重物，重物所经过的路线，发射炮弹时炮弹经过的轨道，从水管里喷射出来的水流等，在不考虑空气阻力情况下，都是抛物线的一段.

关于抛物线、双曲线的性质，在几何第六章中有专门的讨论.

四、幂　函　数

前面研究过的函数

$$y=x,\quad y=x^{-1},\quad y=x^2$$

可以概括成

$$y=x^{\alpha}\quad (\alpha \text{ 为任意实数}).$$

我们称它为幂函数，这里，底数 x 是自变量，幂 y 是底数 x 的函数.

再如，正方形的边长 y 和它的面积 x 之间的关系 $y=x^{\frac{1}{2}}$，正方体的边长 x 和它的体积 y 之间的关系 $y=x^3$，都是幂函数.

现在作出函数 $y=x^3$ 的图象.

取 x、y 的一些对应值：

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x^3$	…	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	…

描点作图得图 7-9.

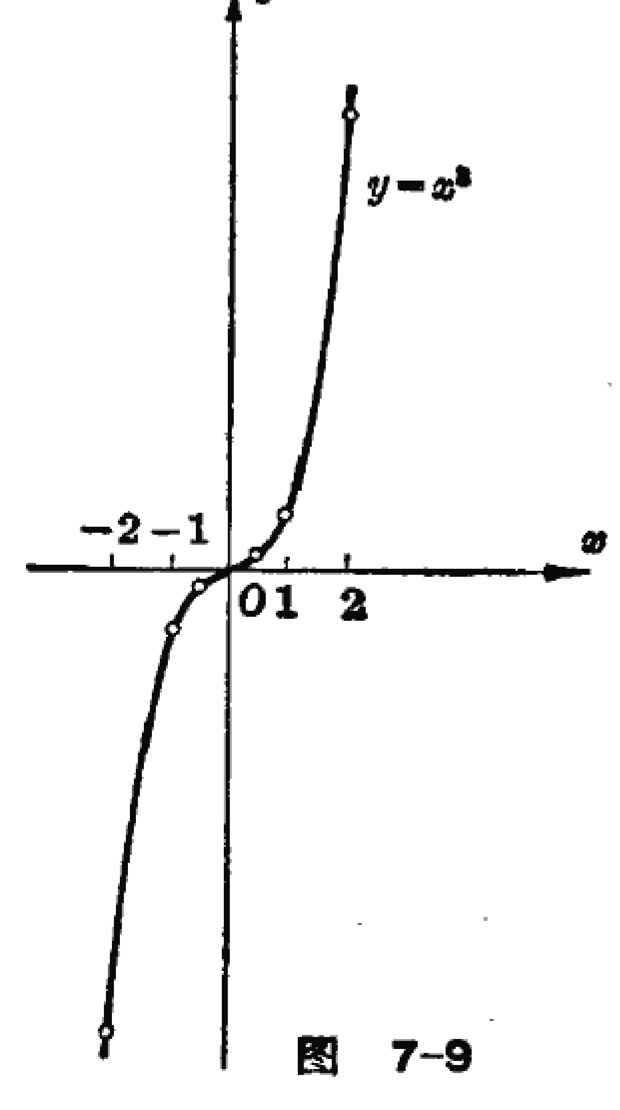


图 7-9

下面讨论函数 $y=x^2$ 和 $y=x^{\frac{1}{2}}$，并引出一个新的概念——反函数概念.

首先列出两组对应值：

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
$y=x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	…

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…

从这两组对应值中我们发现，它们的自变量与因变量的数值正好对调了地位. 譬如，对于 $y=x^2$ 来说，自变量 x 取值 2 时 y 值是 4，自变量 x 取值 3 时 y 值是 9. 而对于 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 来

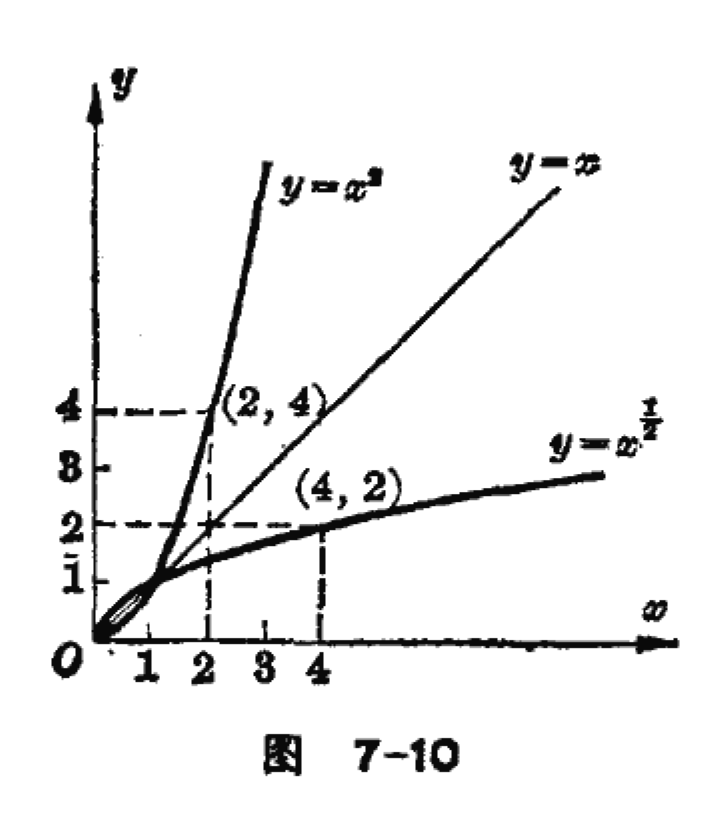


图 7-10

说，恰恰相反，自变量 x 取值 4 时 y 值是 2，自变量 x 取值 9 时 y 值是 3. 这就是说，当 $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2$ 和 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的自变量与因变量正好对调了地位(图 7-10). 象这样两个函数，叫做互为反函数，即 $y=x^2$ 是 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的反函数；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 是 $y=x^2$ 的反函数.

自变量与因变量对调地位，这在图象中也清楚地反映出来. 曲线 $y=x^2$ 上的点 (2, 4) 交换其横坐标与纵坐标，得到点 (4, 2)，它正好是另一曲线 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 上的点. 同样地，点 (9, 3) 在曲线 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 上，而点 (3, 9) 在另一曲线 $y=x^2$ 上. 一般地，曲线 $y=x^2$ 上的任一点 $M(\alpha, \beta)$ 有 $\beta=\alpha^2$，交换其横坐标与纵坐标得点 $N(\beta, \alpha)$，而 $\alpha=\beta^{\frac{1}{2}}$，它一定在曲线 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 上.

在一个坐标平面上，对调横坐标与纵坐标地位，从一个函数的图象就得到它的反函数的图象，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

习 题

1. 在同一坐标平面上作下列函数的图形，并指出哪条直线最陡？

   (1) $y=x$，　$y=\frac{1}{4}x$，　$y=-\frac{1}{4}x$；

   (2) $y=0.5x$，　$y=0.1x$，　$y=10x$；

   (3) $y=-10x$，　$y=-0.1x$，　$y=-4x$.

2. 从下列各关系中，指出哪些是正比函数，哪些是反比函数？

   (1) 速度一定时，所走的距离和所需的时间；

(2) 水池的容量一定时，每小时灌入的水量和灌满水池所需的时间；

(3) 比重一定时，物体的重量和体积；

(4) 重量一定时，物体的容重和体积.

3. 试举出几个正比函数、反比函数的实例.

4. 自由落体的速度公式是 $v=9.8t$，求 $t=1$ 秒和 $t=2$ 秒时，速度 v（米/秒）的值，并根据这两个数据作该函数的图形.

5. 面积为 12 平方米的矩形钢板，它的长 y 和宽 x 有关系 $y=\frac{12}{x}$，作出此函数的图象.

6. 在含有电压 V，电阻 R，电流 I 三个因素的电路中，说明

(1) 当 R 不变时，V 是 I 的什么函数？

(2) 当 I 不变时，V 是 R 的什么函数？

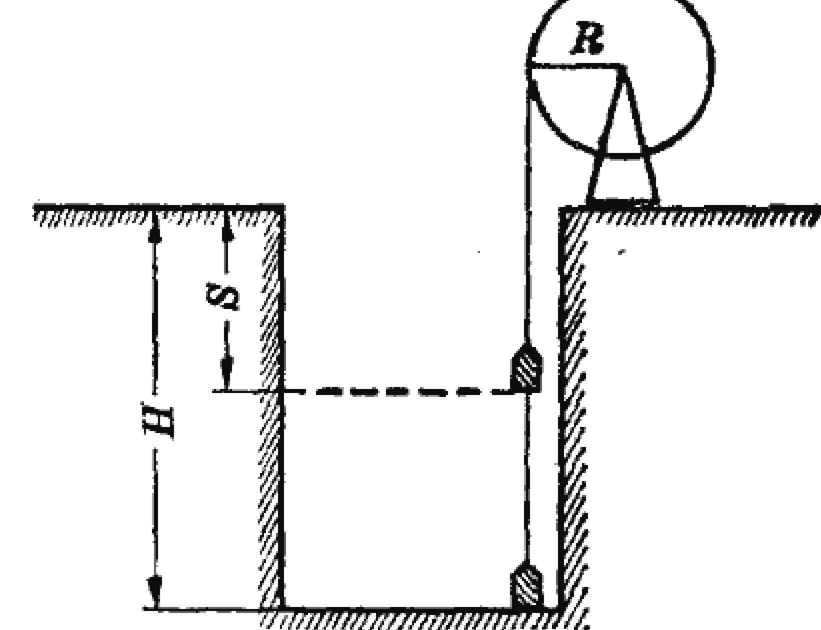
(3) 当 V 不变时，I 与 R 之间是什么函数关系？

7. 在同一坐标平面上，作函数 $y=\frac{1}{2x}$ 和 $y=\frac{2}{x}$ 的图象.

8. 某种自行车的链轮转一圈，飞轮就转 2.3 圈，试作飞轮齿数随链轮齿数变化的图形. 若飞轮是 20 个齿，问链轮是多少齿？如果链轮转一圈，飞轮转1.8圈，问飞轮是 20 个齿时，链轮是多少齿？

9. 在温度计上摄氏 0 度对应于华氏 32 度，摄氏 100 度对应于华氏 212 度，试求摄氏温度 C 和华氏温度 F 的函数关系，并用描点法作出其图象.

10. 矿井深 H 米，半径为 R 的卷筒以等角速度 ω 旋转（即每秒钟转 ω 弧度），如图，从矿井起吊重物. 设开始起吊时刻 $t=0$，求起吊过程中，重物离地面的距离 S 与时间 t 的函数关系.（注意：半径为 R，圆心角为 φ 弧度所对的圆弧长是 $R\varphi$.）又若 $H=50$ 米，$R=0.5$ 米，$\omega=\pi$ 弧度/秒（即每秒转半圈），问需要多少时间才能将重物吊至地面？



11. 无线电波波段划分如下表，可以看出，在各波段中频率 f 与波长 λ 成反比关系，试写出其函数式.

波　　长	波长 λ（单位：米）	频率 f（单位：周/秒）
长　　波	30000～3000	10000～100000
中　　短	3000～200	100000～1500000
短　　波	200～50	1500000～6000000
短　　波	50～10	6000000～30000000
超　短　波	10～1	30000000～300000000

我国第一颗人造地球卫星用20.009兆周（即20009000周）频率播送"东方红"乐曲，问其波长约为多少米？

12. 不用作图，指出下列抛物线的顶点位置，并比较其开口大小？

(1) $y=10x^2$;　(2) $y=0.1x^2$;　(3) $y=-4x^2$;　(4) $y=-0.5x^2$.

13. 作出幂函数 $y=x^{-2}$, $y=x^{-1}$, $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的图形，并比较一下 $x>0$ 时的图形.

14. 作出函数 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 和 $y=x^{-\frac{3}{2}}$ 的图象.

15. 在同一坐标平面上，作出函数 $y=x^3$ 和 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图形，并说明两者互为反函数.

16. 分别求出函数 $y=x^4$, $y=x+1$, $y=\dfrac{x-3}{2}$ 的反函数.

17. 圆面积 S 是直径 D 的函数，试作出它的图象.

18. 一般金属丝的电阻 R 与温度 T 的关系如下表：

温　度 T (°C)	0	5	10	15	20
电　阻 R (Ω)	25.0	25.5	26.0	26.5	27.0

(1) 在坐标平面上画出函数的图象；

(2) 算出温度每上升1度，电阻 R 变化的数值(称为电阻率，记为 ρ)；

(3) 写出 R 与 T 的函数式.

第三节　指数函数与对数函数

一、指数函数

在实际问题中会遇到一种函数叫做指数函数.

例如，地球表面有一层大气，它的密度随着地面高度的增加而减小，因而大气压力就随着地面高度的增加而迅速减小. 根据实验，海拔 h 公里处的大气压力 P 近似地等于

$$P=P_0e^{-kh}\quad(h\geqslant 0).$$

在这里，海平面的大气压力 P_0 和 k 都是正的常数，而 h 和 P 都是变量，当 h 取某一值时，按规律 P_0e^{-kh}，P 就有一个确定的对应值，所以 P 是 h 的函数.

在第四章中我们又知道，在电容器的放电过程中，端电压 U 与时间 t 的关系是

$$U=U_0e^{-\frac{t}{RC}}.$$

其中，电阻 R、电容 C、充电后电容器上的电压 U_0 都是常数. 变量 U 随着变量 t 而变化，当 t 取某一值时，U 按规律 $U_0e^{-\frac{t}{RC}}$ 取一确定对应值，所以 U 是 t 的函数.

从这两个函数可以得到形式为

$$y=e^x\quad(e=2.71828\cdots)$$

的函数，称为以 e 为底的指数函数. 指数 x 是自变量，幂 y 是函数.

现在用描点法作出函数 $y=e^x$ 的图象.

取 x、y 的一些对应值：

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y=e^x$	$\cdots$	0.135	0.369	1	2.718	7.389	$\cdots$

描点得函数 $y=e^x$ 的图象如图 7-11 所示（从对应值中看出，y 值的增长速度比 x 大得多，有时为了作图方便，可以在横轴和纵轴上选择不同的单位）.

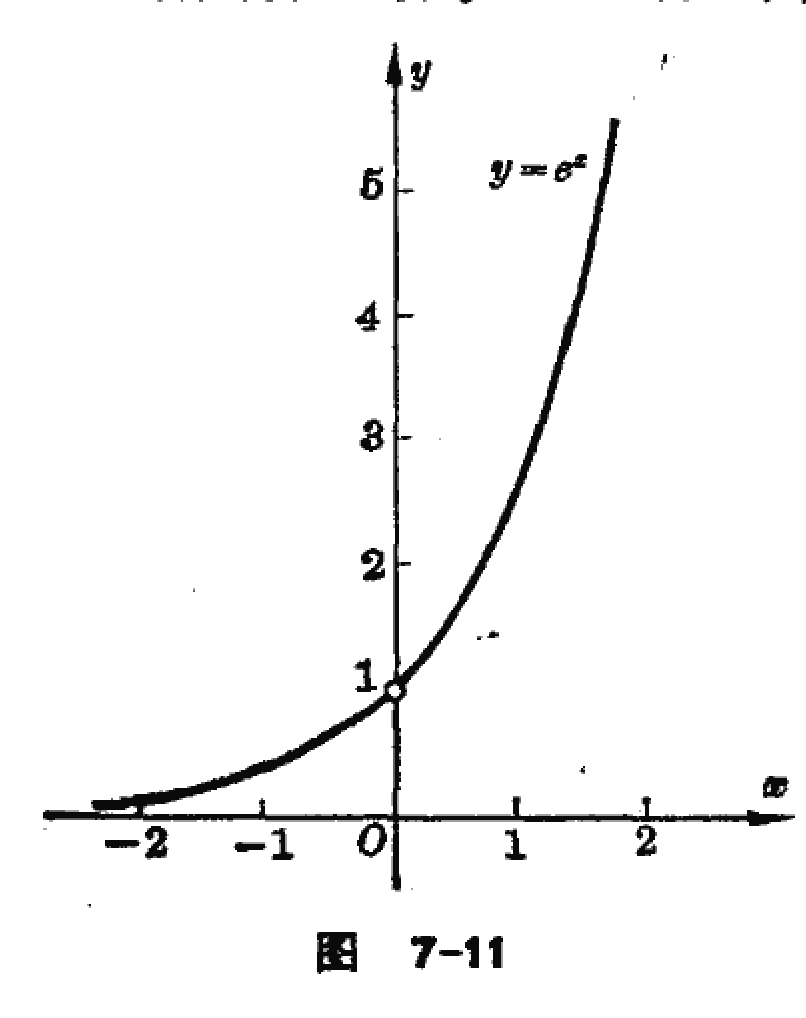


图 7-11

从图中看出，$y=e^x$ 的图象是一条过点 $(0,1)$ 的曲线，在 x 轴的上方，并且随着自变量趋向 $+\infty$，函数值也趋向于 $+\infty$；而自变量趋向 $-\infty$ 时，函数值趋近于零.

请读者作出函数 $y=e^{-x}$ 的图象，并与 $y=e^x$ 的图象作比较.

二、对 数 函 数

在大气压力 P 与高度 h 的关系

$$P=P_0e^{-kh} \quad (h\geqslant 0)$$

中，已知指数 h 可求得 P. 由于指数运算与对数运算互为逆运算，已知大气压力 P 也可求得高度 h：

$$h=-\frac{1}{k}\ln\frac{P}{P_0}.$$

飞机上根据气压大小来测定它的高度的测高仪，就是利用这个道理. 这里，P 和 h 都是变量，当 P 取某一值时，h 就按规律 $-\frac{1}{k}\ln\frac{P}{P_0}$ 有一个确定的对应值，所以 h 是 P 的函数.

函数

$$y=\ln x \quad (x>0)$$

称为以 e 为底的对数函数. 这里，x 是自变量，$\ln x$ 是 x 的

函数. 可以说明，指数函数 $y=e^x$ 和对数函数 $y=\ln x$ 互为反函数.

事实上，在指数函数 $y=e^x$ 中，对调自变量 x 和因变量 y 的地位，就有 $x=e^y$，它们互为反函数. 由于对数运算与指数运算互为逆运算，因此

$$x=e^y \quad 与 \quad y=\ln x$$

是同一函数的两种表示，所以

$$y=e^x \quad 与 \quad y=\ln x$$

互为反函数.

对调横坐标与纵坐标的地位，从指数函数 $y=e^x$ 的图象可得到对数函数 $y=\ln x$ $(x>0)$ 的图象(图 7-12).

从 $y=\ln x$ 的图象可看出，曲线与 x 轴相交于点 $(1, 0)$，且在 y 轴右方，当 x 增大时，y 也随之增大，曲线右端不断上

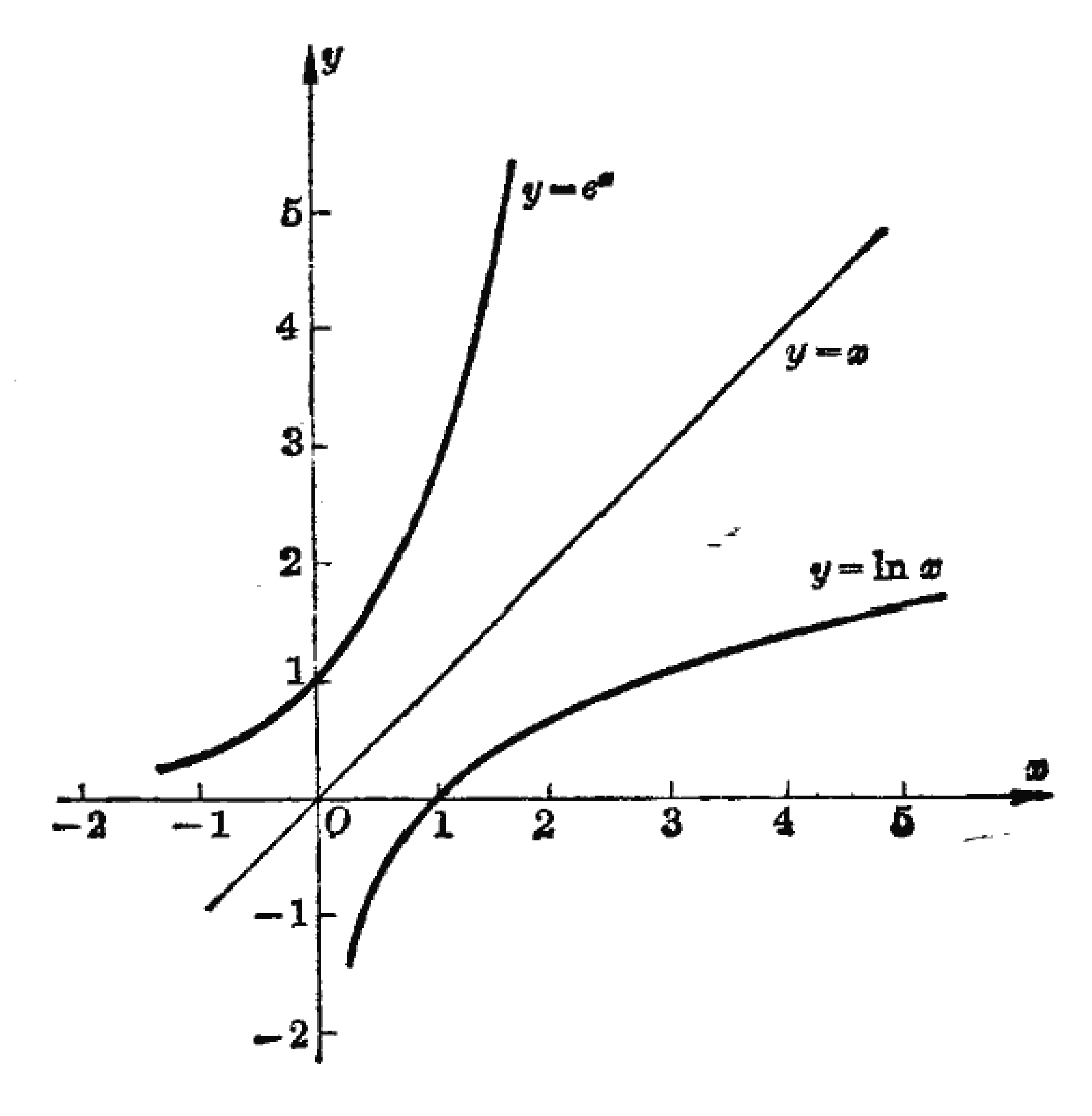


图 7-12

升；当 x 无限趋近于零时，y 趋于 $-\infty$，即曲线不断下降而接近于 y 轴.

对于不为零的正常数 a，以 a 为底的指数函数

$$y=a^x$$

以及以 a 为底的对数函数

$$y=\log_a x \quad (x>0),$$

也都是常见的，这两个函数相互对调了自变量与因变量的地位，它们互为反函数.

注意，不要把幂函数 $y=x^\alpha$ 和指数函数 $y=a^x$ 混淆起来，前者的底数是自变量，指数是常数；而后者的底数是一个常数，指数是自变量.

请读者自行研究当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 两个图象.

习　　题

1. 在同一坐标平面上作出下列函数的图象，并比较其性质：
$$y=2^x;\quad y=2^{-x};\quad y=-2^x;\quad y=-2^{-x}.$$
2. 在同一坐标平面上作出函数 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 的图象，并比较它们的性质.
3. 在同一坐标平面上，画出下列各函数的图象：
$$y=2^{x+1};\quad y=\ln(x+1);\quad y=\lg(x+1).$$
4. 用描点法作函数 $U=10e^{-0.2t}$ 的图象，其中 $t\geqslant 0$，取 t 值为 0, 2.5, 5, 7.5, 10, 12.5, 15. 并从图象上找出对应于 $U=5$ 的 t 值.
5. 求下列函数的反函数，并分别作出原函数及其反函数在同一坐标平面上的图象：

(1) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　　(2) $y=\lg x$；

(3) $y=\log_{\frac{1}{10}} x$；　　(4) $y=\ln(x-2)$.

第四节　三角函数与反三角函数

一、三 角 函 数

在第一节中已经知道 $y=\sin x$ 称为正弦函数. 同样地, $y=\cos x$ 称为余弦函数, $y=\operatorname{tg} x$ 称为正切函数. 正弦函数、余弦函数、正切函数都是三角函数.

关于三角函数, 我们已经学会计算它们的值, 也知道它们的基本性质, 现在还要作出它们的图象, 以便从整体上有个直观的了解.

1. 关于 $y=\sin x$ 的图象

根据正弦函数的求值方法, 任意一个 x 都对应着一个 y, 在坐标平面上就得到一个点 (x, y), 这种点的全体就是 $y=\sin x$ 的图象.

自变量 x 在区间 $[0, 2\pi]$ 上每隔 $\frac{\pi}{6}$ 取一个值, 计算它的正弦得到一批对应值:

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
$\sin x$	…	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0	…

在坐标平面上描出这些点, 再将它们依次连结成一条光

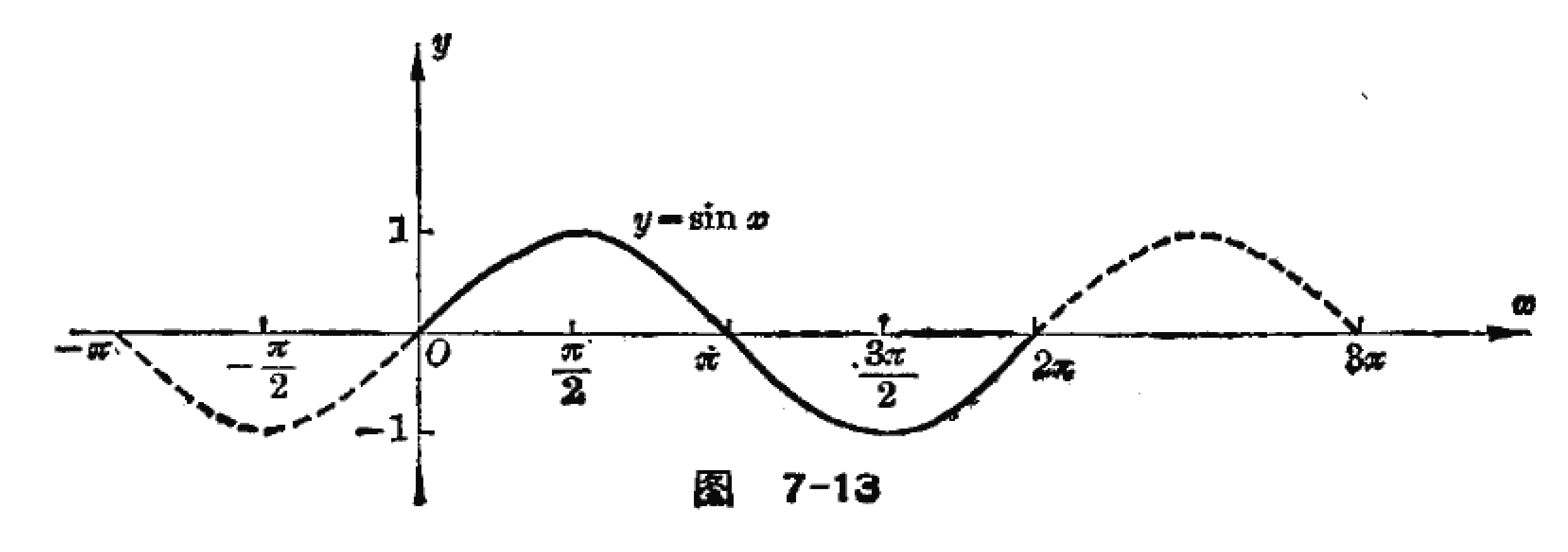


图　7-13

滑曲线，得到一段正弦函数的图象．由于正弦函数以 2π 为周期，把这一段曲线沿 x 轴方向向左向右连续平移 2π，就得到正弦函数的图象（图 7-13）．

从这个图象可以看出：

(1) $y=\sin x$ 的最大值是 1，最小值是 -1，即函数值范围是

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

(2) 当 x 从 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 的值从 -1 逐渐增大到 1；当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 的值又从 1 逐渐下降到 -1；当 x 取 0、π、2π 时，$\sin x$ 的值为零．

这里，我们描出了很多点，实际上，只要描出五个关键性的点 $(0, 0)$，$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$，$(\pi, 0)$，$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$，$(2\pi, 0)$，这个图象也就大致地确定了．

正弦函数的图象好象一条波纹，习惯上称为正弦波．

2．关于 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

在生产实践中我们还可以发现，象正弦交流电的振荡、机械振动等一类运动形式，都遵循着正弦函数的变化规律．它们的一般形式是

$$y=A\sin(\omega x+\varphi),$$

这里，A，ω，φ 是三个常数．我们举例说明这种函数的图象．为了简便起见，下面只研究这种函数在一个周期内的图象．

[例 1]　作 $y=3\sin x$ 的图象．

为了看清 $y=3\sin x$ 的图象的特性，我们把它与 $y=\sin x$ 相比较．

列出 $y=3\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的几个关键性的点：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin x$	0	3	0	-3	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

比较 $y=3\sin x$ 和 $y=\sin x$ 的对应点我们发现，对任意一个 x，$y=3\sin x$ 都是 $y=\sin x$ 的三倍．因此，把 $y=\sin x$ 的图象上的点的纵坐标放大到三倍，就得到 $y=3\sin x$ 的图象，如图 7-14.

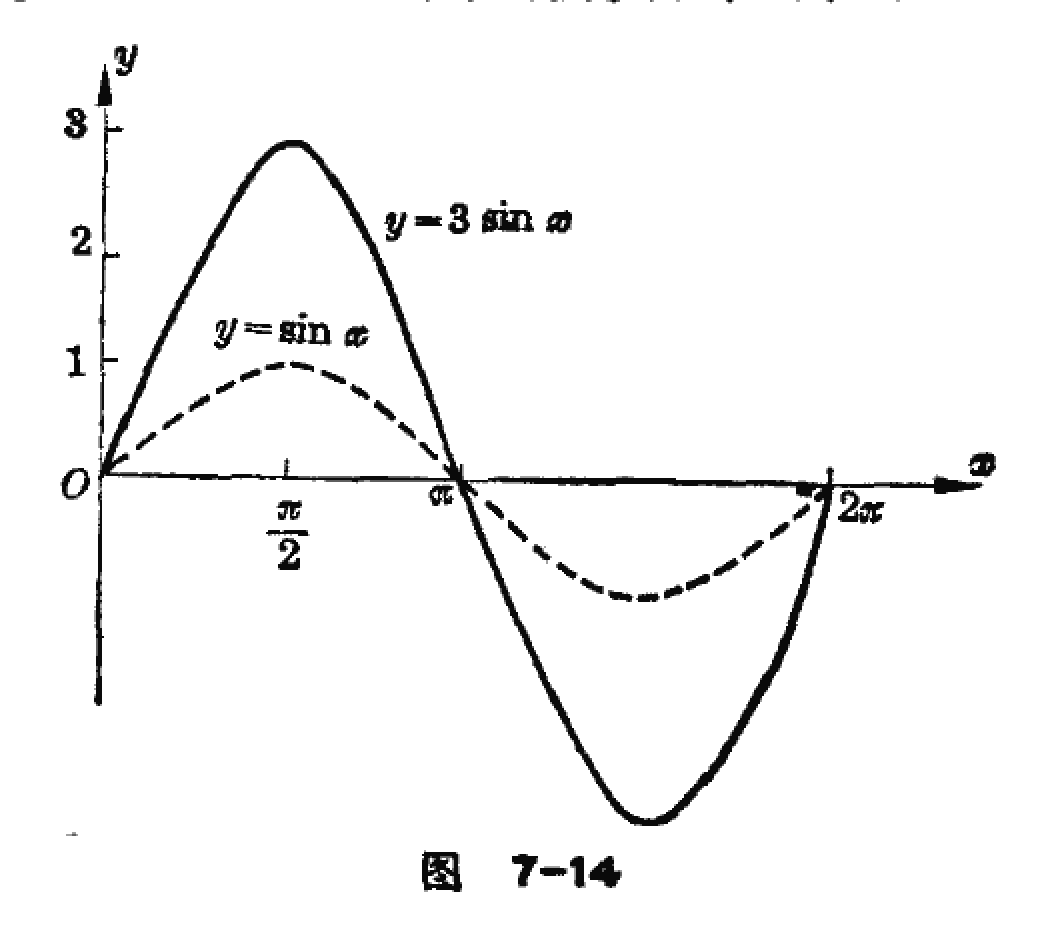


图 7-14

一般地说，对于正数 A，只要把 $y=\sin x$ 的图象上的点的纵坐标放大到 A 倍，就得到

$$y=A\sin x$$

的图象．A 称为函数 $y=A\sin x$ 的振幅．A 愈大，波的振动幅度也愈大．在实际问题中，振幅 A 有具体含义，例如在振动（或摆动）中，振幅 A 表示振动点离开平衡位置的最大距离；在正弦交流电中，振幅 A 表示正弦电流（或电压）的最大值.

［例 2］ 作 $y=\sin 2x$ 的图象.

列出 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的几个关键性的点：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

比较$y=\sin 2x$和$y=\sin x$的对应点我们发现，当$y=\sin 2x$的自变量是$y=\sin x$的自变量的一半时，这两个函数的函数值相等，因此把$y=\sin x$的图象沿x轴方向向着原点压缩成原来的一半，得到的就是$y=\sin 2x$的图象，如图 7-15.

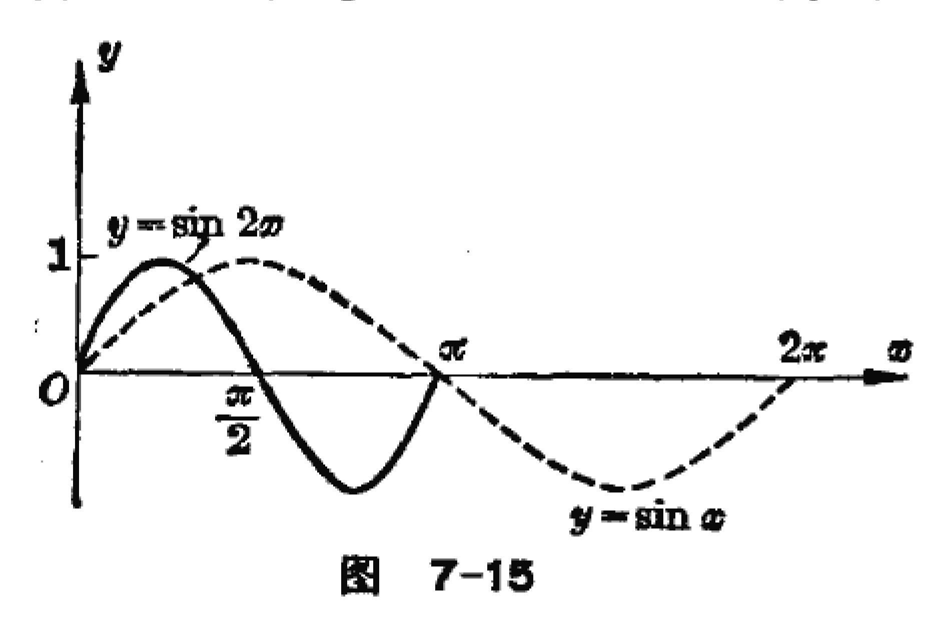


图 7-15

一般地说，对于任一正数ω，把$y=\sin x$的图象沿横轴方向向着原点压缩成原来的$\frac{1}{\omega}$，就得到$y=\sin \omega x$的图象. $\frac{2\pi}{\omega}$是$y=\sin \omega x$的周期$\left(\sin \omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin \omega x\right)$，$\omega$的数值决定了波纹的疏密程度．周期$\frac{2\pi}{\omega}$也有实际意义，它表示振(波)动一次所需要的时间.

[例 3]　作$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

仍和$y=\sin x$比较，列出几个关键性的点：

x	$0-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\pi-\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$2\pi-\frac{\pi}{6}$
$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	0	1	0	-1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=\sin x$ 的对应点作比较，我们发现，对任意一个 x，$y=\sin x$ 在 x 处的值与 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $x-\frac{\pi}{6}$ 处的值相等，因此，把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向左移 $\frac{\pi}{6}$ 所得到的就是 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象(图 7-16)。

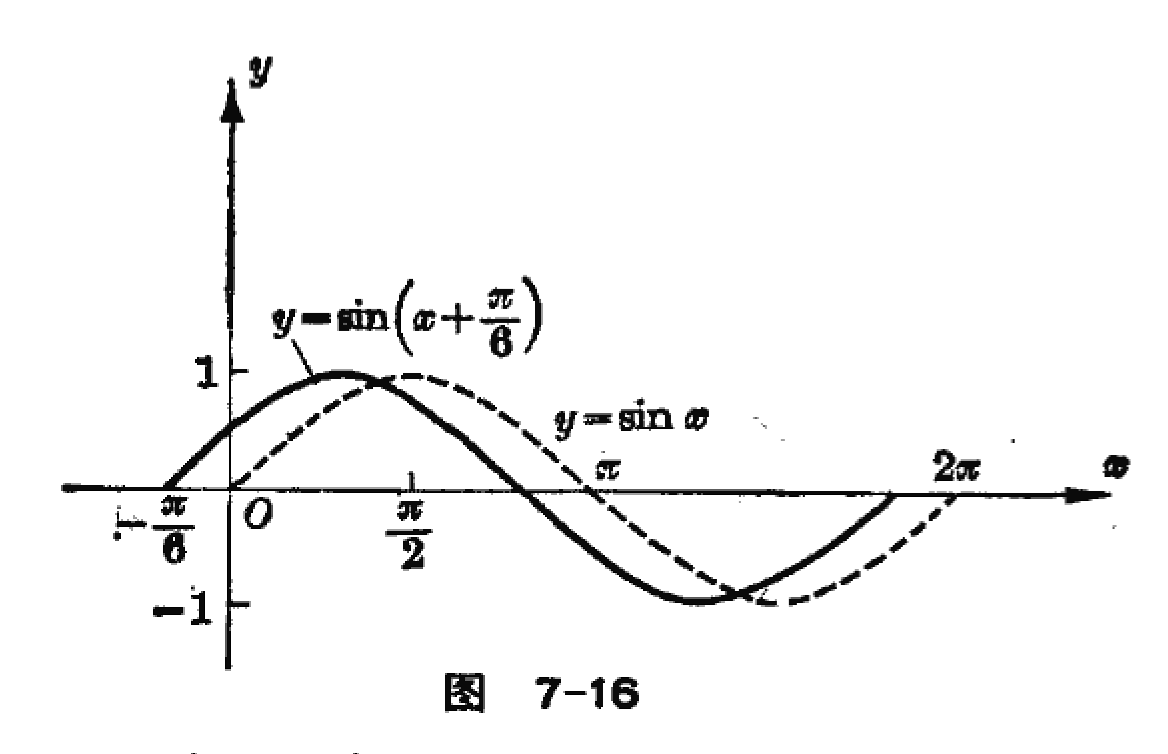


图 7-16

对于 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 来说，把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向右移 $\frac{\pi}{6}$ 得到的就是 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

一般地说，把正弦函数 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向左移 φ 就可得到

$$y=\sin(x+\varphi)$$

的图象；当 $\varphi>0$ 时向左移 φ，当 $\varphi<0$ 时向右移 φ. 这时，在 $x=-\varphi$ 处 $\sin(x+\varphi)$ 取零值. φ 决定了波动的初始位置.

由于 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$，于是把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向左移 $\frac{\pi}{2}$ 就得到余弦函数

$$y=\cos x$$

的图象(图 7-17).

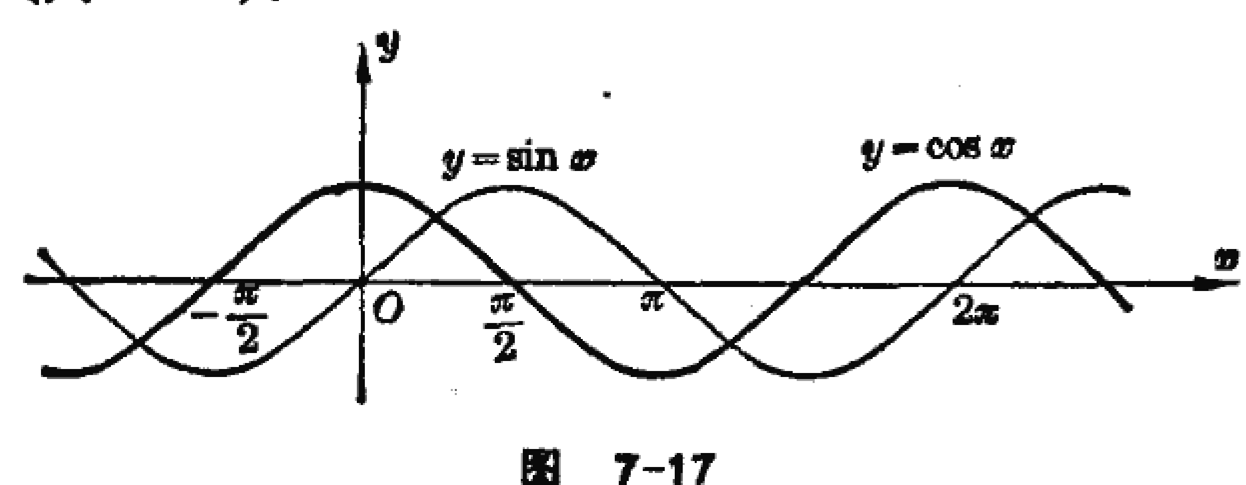


图 7-17

余弦函数 $y=\cos x$ 的图象也可用描点法画出，只要描出几个关键性的点：$(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$，$(2\pi,1)$ 就可以了.

综合以上的讨论，我们可以作出函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

的图象. 例如，我们来作 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

由 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 得知：

这个函数的振幅是 3，它的周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时它的值是零.

先把 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴方向向着原点压缩成原来的

一半，得到 $y=\sin 2x$ 的图象；再把 $y=\sin 2x$ 的图象沿 y 轴方向扩大到三倍，得到 $y=3\sin 2x$ 的图象；最后把 $y=3\sin 2x$ 的图象沿 x 轴方向向左平移 $\frac{\pi}{6}$，得到 $y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，即所求的

$$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

的图象(图 7-18)。

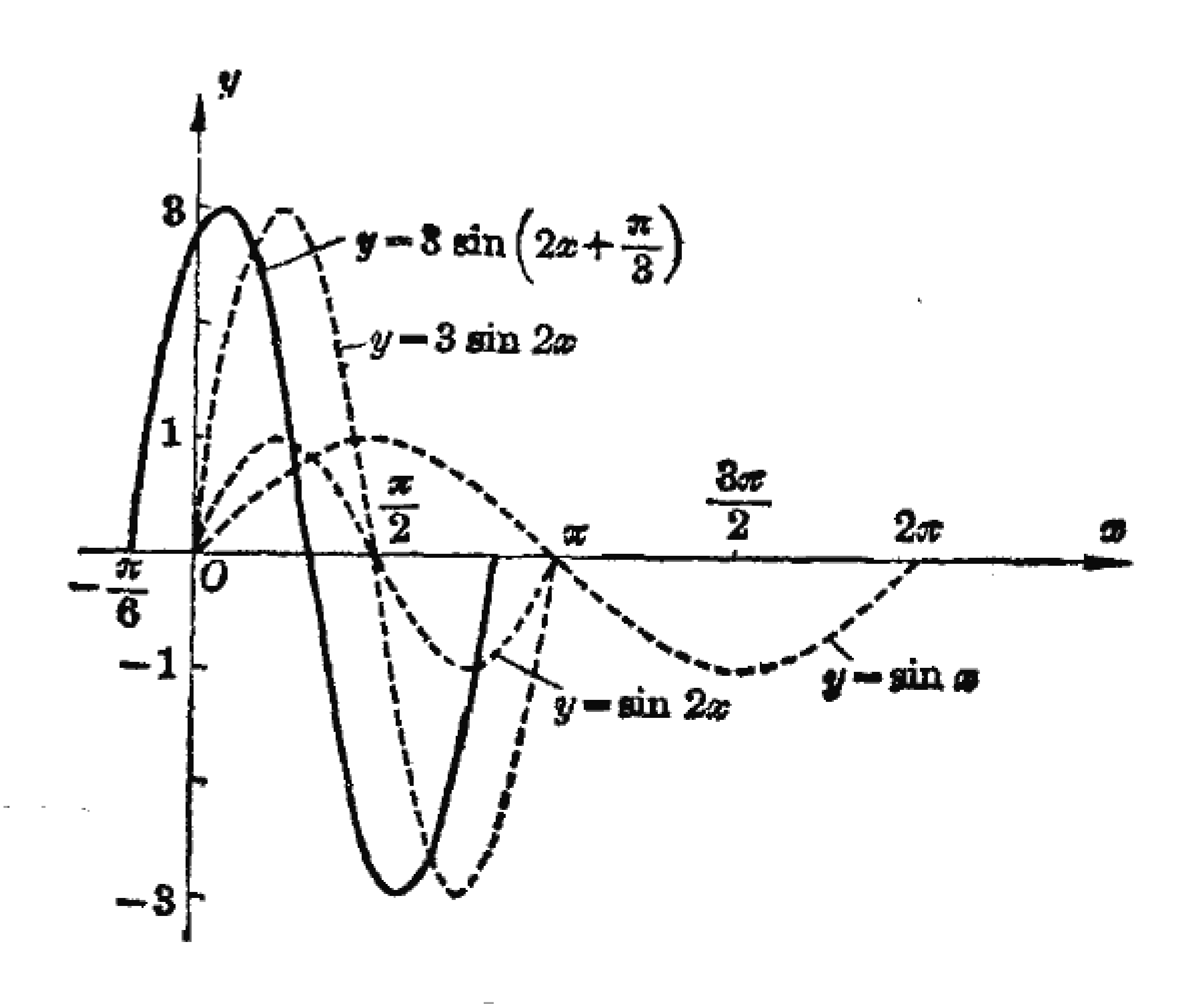


图 7-18

但通常是用描点法直接作出 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，列出几个关键性的点：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

依次连结 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$，$\left(\frac{\pi}{12}, 3\right)$，$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$，$\left(\frac{7\pi}{12}, -3\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 成一条光滑曲线就得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的一段图象，由于 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，经过连续平移 π，便得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

作为练习，请读者研究

$$y=A\sin(\omega x+\varphi) \quad (A>0,\ \omega>0)$$

的图象. 当式中的常数 A、ω、φ 取不同数值时，讨论对应的函数图象的变化情况.

3. 正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的图象

我们知道，正切函数

$$y=\operatorname{tg} x$$

的周期是 π，并且当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时函数值不存在；因此在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内算出几个对应值，就可作出一段正切函数

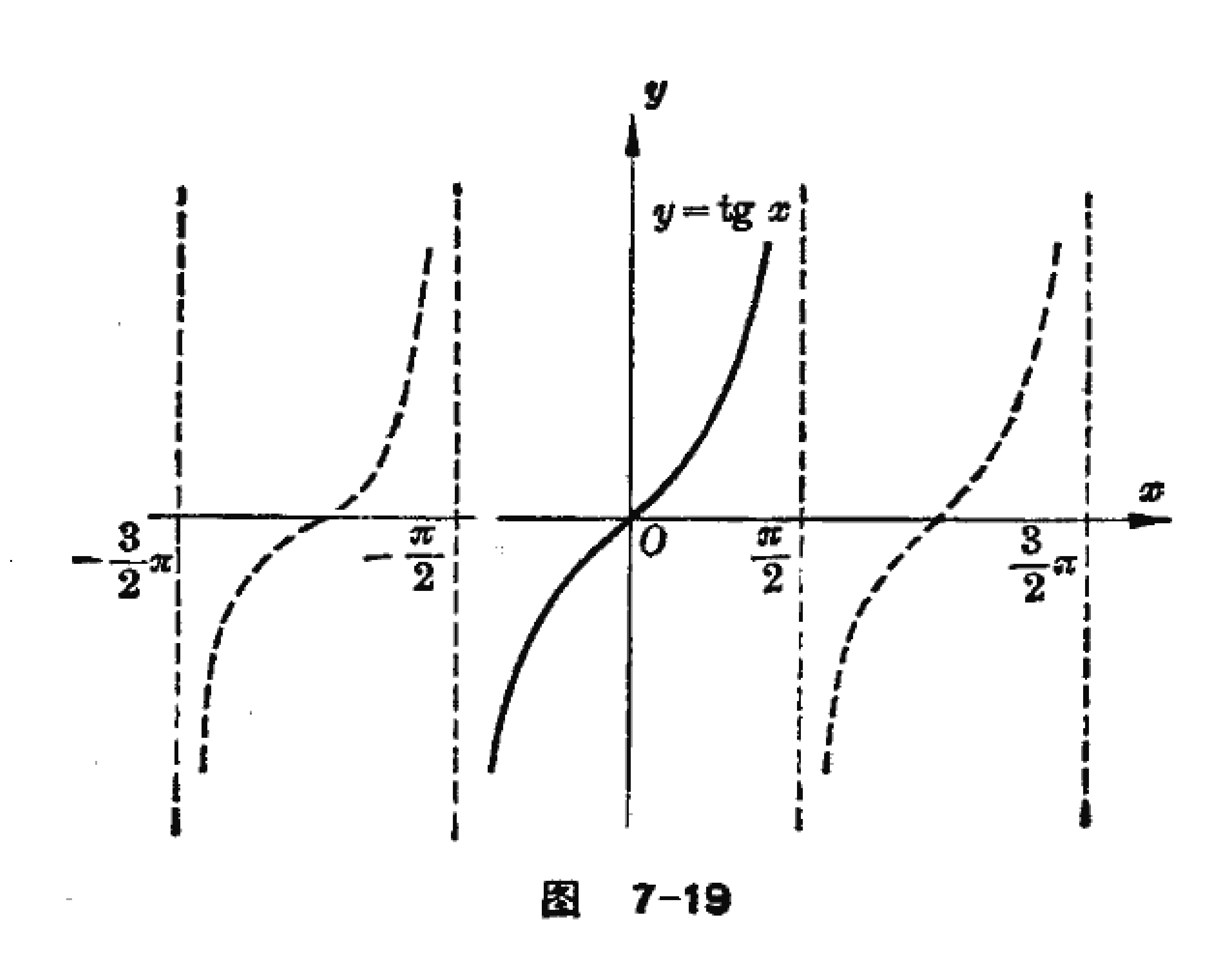


图 7-19

的图象，然后向左向右连续平移 π，就得到正切函数的图象（图 7-19）.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\operatorname{tg} x$	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

正切函数的图象与正弦函数的图象不同，它不是连续不断的，而是被一些直线所分开.

二、反三角函数

对于 $[-1, 1]$ 上的任意一个数 a，设

$$a=\sin\alpha,$$

则在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上正好有一个角

$$\alpha=\arcsin a$$

与之对应；角 α 可以看作是正弦值 a 的函数. 如果用 x 表示正弦值，y 表示对应角，于是就得到反正弦函数

$$y=\arcsin x.$$

同样地，可以得到

反余弦函数　　$y=\arccos x$,

反正切函数　　$y=\operatorname{arc\,tg} x$.

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数都是反三角函数.

现在作反三角函数的图象.

［例 4］　作 $y=\arcsin x$ 的图象.

我们知道，对于 $[-1, 1]$ 中任何一个数 x，$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上都正好有一个对应角 $y=\arcsin x$，这样，(x, y) 对应图象上一个点，列出这样一批点：

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y=\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

描出这些点，依次连结成一条光滑曲线，就得到反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图象(图 7-20)。

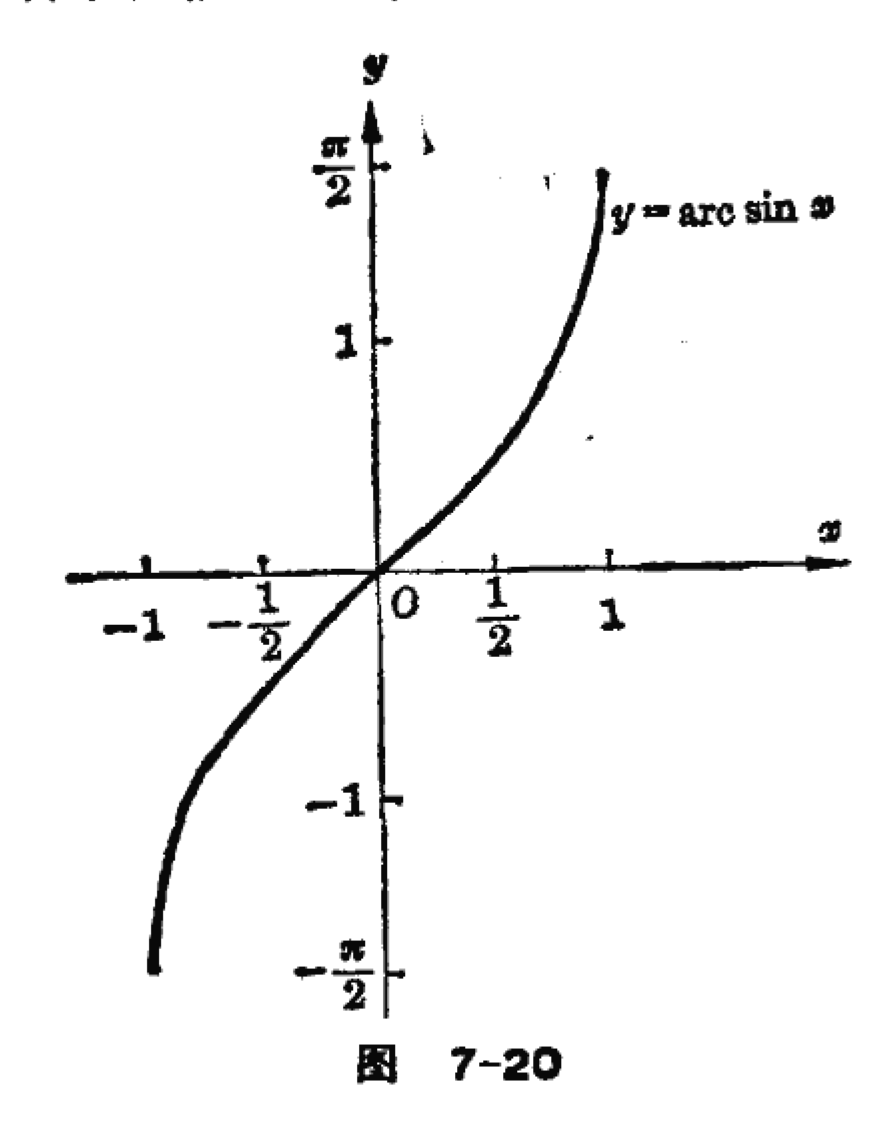


图 7-20

［例 5］ 作 $y=\arccos x$ 的图象。

对于 $[-1, 1]$ 中任何一个数 x，$[0, \pi]$ 上正好有一个对应角 $y=\arccos x$，列出一批对应点：

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$y=\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0

依次连结这些对应点，就得到反余弦函数 $y=\arccos x$ 的图象（图 7-21）。

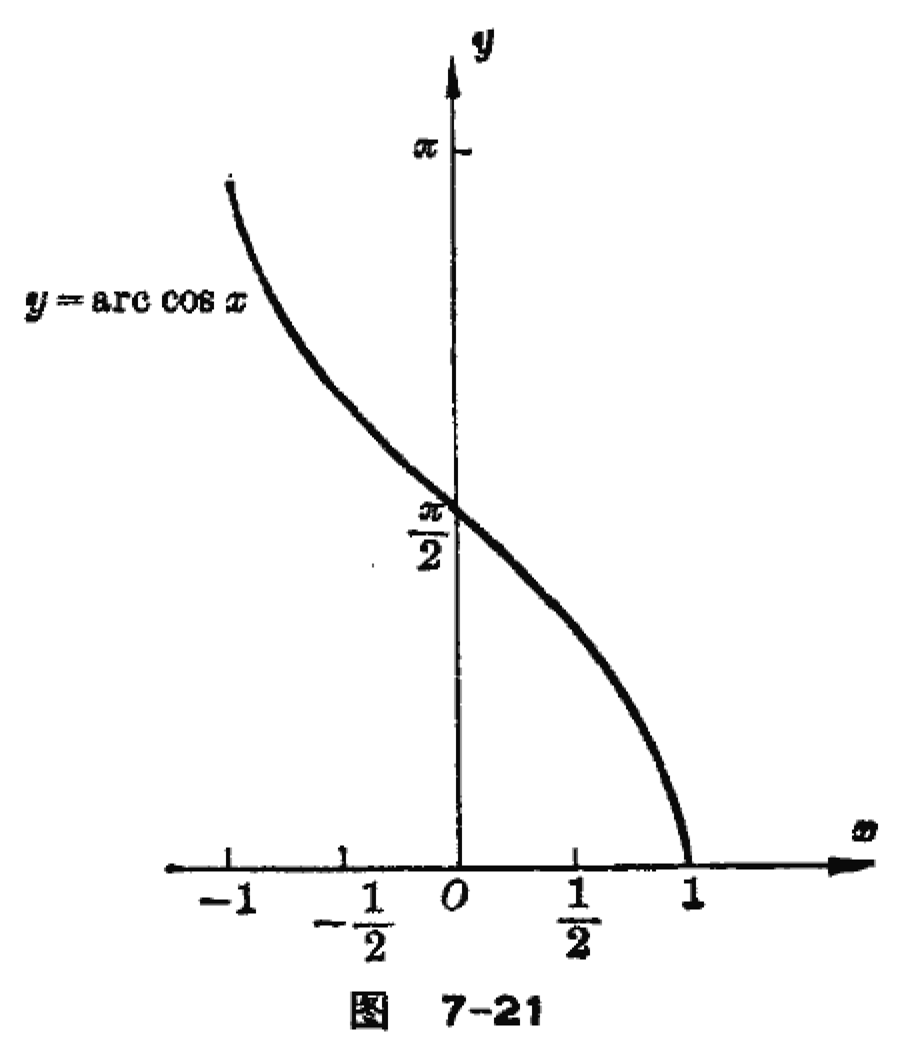


图 7-21

［例 6］ 作 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象.

对于任意一个 x，$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中正好有一个角 y 适合 $y=\operatorname{arc\,tg} x$，可以列出一批对应值：

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$y=\operatorname{arc\,tg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

依次连结这些对应点，就得到反正切函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象（图 7-22）。

可以看出，三角函数与反三角函数互为反函数．例如

$$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \text{ 与 } y=\arcsin x$$

互为反函数。

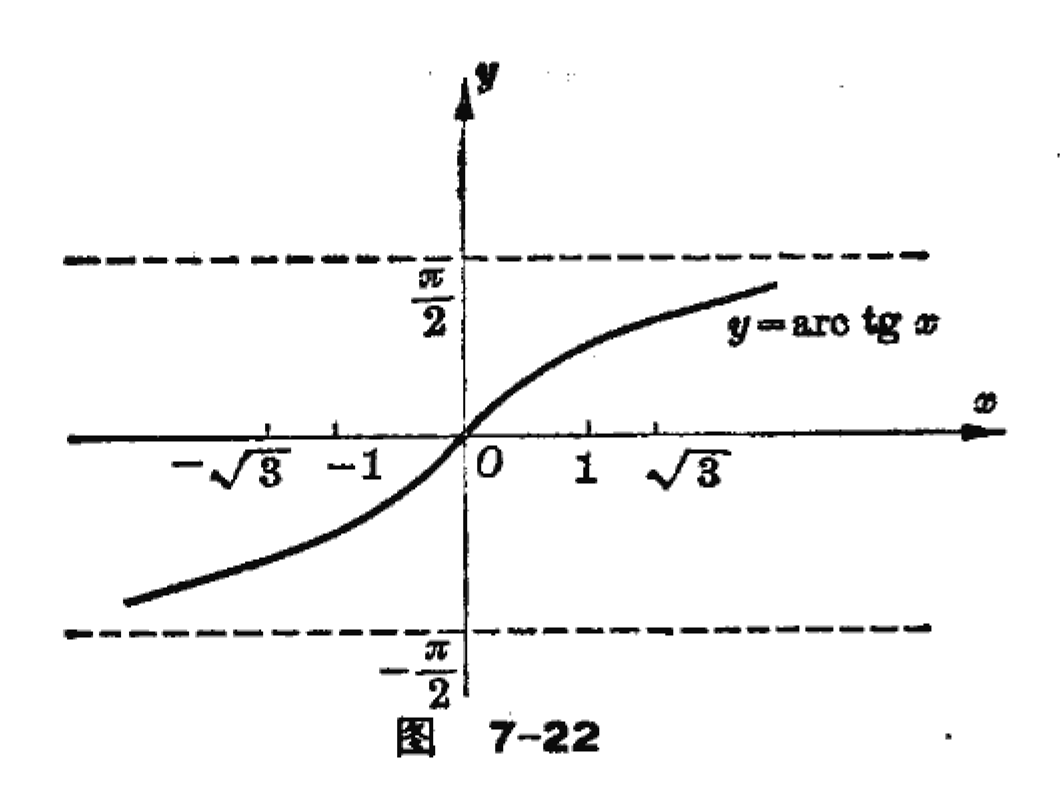


图 7-22

事实上,对调$y=\sin x$的自变量x与因变量y的地位,那末

$$y=\sin x \quad 与 \quad x=\sin y$$

互为反函数. 而

$$x=\sin y \quad 与 \quad y=\arcsin x$$

当$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$时是同一函数的两种表示,所以

$$y=\sin x \quad 与 \quad y=\arcsin x$$

互为反函数.

同样, $y=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 $y=\arccos x$, $y=\operatorname{tg} x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 也互为反函数.

习　题

1. 用描点法作出下列函数的图象:

　(1) $y=\cos x$;　　(2) $y=\operatorname{ctg} x$;

　(3) $y=\sec x$;　　(4) $y=\csc x$.

2. 利用函数图形说明:

　(1) $\sin 210°$与$\sin(-60°)$哪一个大? $\sin\frac{3\pi}{2}$与$\sin\frac{7\pi}{6}$哪一个大?

　(2) x等于0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$时, $\sin x$的值是多少?

　(3) $\cos x$取得最大值与最小值时,对应的x是多少?

　(4) 在什么范围内,当x增加时$\operatorname{tg} x$也增加?

3. 写出下列各函数的周期，并作出其图象：

(1) $y=\frac{1}{2}\sin x$;　　(2) $y=\sin\frac{x}{2}$;

(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;　　(4) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 根据负角公式说明：

(1) 正弦函数与正切函数的图象都关于原点对称；

(2) 余弦函数关于纵轴对称.

5. 作出函数 $y=-\sin x$ 的图象，并说明与 $y=\sin x$ 图象的关系；作出函数 $y=-\operatorname{tg}x$ 的图象，说明与 $y=\operatorname{tg}x$ 图象的关系.

6. 作出下列各函数的图象：

(1) $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;　　(2) $y=-2\cos x$;

(3) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;　　(4) $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

7. 利用三角公式将下列函数整理成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 型，并作出各函数的图象：

(1) $y=\sin x+\cos x$;　　(2) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$;

(3) $y=4\sin x\cos x$.

8. 根据 $y=\sin x$ 的图象，讨论 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的对应角，写出：

(1) 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的对应角；

(2) 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上的对应角；

(3) 一切对应角.

9. 根据 $y=\cos x$ 的图象，讨论 $\cos x=\frac{1}{2}$ 的对应角，写出

(1) 在 $[0, \pi]$ 上的对应角；

(2) 在 $[0, 2\pi)$ 上的对应角；

(3) 一切对应角.

10. 根据 $y=\operatorname{tg}x$ 的图象，说明对于任意一个 y，

$$y=\operatorname{tg}x,$$

x 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上正好有一个对应角.

复　习　题

1. 用公式表示下列函数关系:

(1) 拖拉机重量 W 一定时,地面单位面积上所受的压力 P 与履带轮接触地面的面积 Q 成反比;

(2) 某拖拉机翻地时,油箱有 40 公斤油,翻地一小时要用 6 公斤油.写出油箱中的剩油量 y(公斤)与翻地时间 t(小时)之间的函数关系,并求出当 t 分别为 0.5、1、5 小时的剩油量;

(3) 用雷达探测敌机,根据发射电波后碰到敌机反射回来的时间 t,可以算出雷达站和敌机间的距离 s.已知电波传播速度是 300 米/微秒(10^6 微秒=1秒),写出距离 s 与时间 t 的函数关系,并说明函数的类型;

(4) 某条马路需翻修,路宽 12 米,路面厚 4 厘米,经试验测得 1 立方米路面要用 1.10 立方米的碎石.写出所用碎石体积 V 和路面长度 l 间的函数式,作出它的图象并根据图象求出修 200 米长马路,需准备多少立方米的碎石.

2. 将半径为 R 的圆形铁片,自圆心剪去一圆心角为 φ 的扇形,把剩余的铁片做成一个圆锥形的漏斗.试写出此漏斗的容积 V 与 φ 之间的函数关系.

3. 用描点法作出下列函数的图形:

(1) $y=-x^2-1$;　　(2) $y=2(x-3)^2$;

(3) $y=\frac{1}{x+1}-1$;　　(4) $y=\frac{1}{x^2}+2$;

(5) $y=10^{x+1}$;　　(6) $y=-\ln\frac{x}{5}$.

4. 作出下列函数的图形:

(1) $y=\sin\frac{\pi}{2}t$;　　(2) $y=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

5. 作 $y=3\cos 2x$ 的图形,求出其周期,并与 $y=\cos x$ 的图形进行比较.

6. 作函数 $y=\cos(-x)$,$y=\operatorname{tg}(-x)$的图形.

7. 试根据正弦函数的图象,说明正弦函数诸如

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \sin(\pi-x)=\sin x,$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \sin(2\pi+x)=\sin x$$

等性质.

同样地,根据余弦函数的图象,讨论余弦函数的性质;根据正切函数的图象讨论正切函数的性质.

8. 某厂常用往复性振动来检查产品的质量,振动的位移 y 是时间 t 的正弦函数

$$y=6\sin\left(5t+\frac{\pi}{4}\right),$$

试作出其图象,并解答下列问题:

(1) 开始时的位移是多少?

(2) 振动的振幅是多少?

(3) 经过多少时间重复振动一次?

9. 试证 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

第八章　数列　排列与组合

第一节　数　　列

一、数列的概念

在工厂里需要把产品的日产量按时间顺序记录下来．譬如某种产品一日、二日、三日、……的产量依次记录为

$$1000, 1001, 1003, 1000, 1002, \cdots. \quad (1)$$

在自由落体运动中，某物体在下落的第一秒内降落 4.9 米，以后每一秒比前一秒多降落 9.8 米，一共降落 5 秒钟着地．这时每一秒钟所降落的米数可依次记录为

$$4.9,\ 4.9+9.8,\ 4.9+2\times9.8,$$
$$4.9+3\times9.8,\ 4.9+4\times9.8. \quad (2)$$

(1)、(2) 都是按照一定顺序排列着的一列数．我们把这种按照一定顺序排列着的一列数叫做数列．数列的一般形式是

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

其中每个数都叫做数列的一个项，第一个数 a_1 叫做第 1 项，第二个数 a_2 叫做第 2 项，……，第 n 个数 a_n 叫做第 n 项，…….

第 n 项 a_n 可以表示数列的任意一项，又叫做通项．如果 $n=1$，a_n 就表示第 1 项；$n=2$ 时，a_n 表示第 2 项．如果把第 n 项 a_n 表示为 n 的函数，这个关系式就叫做数列的通项公式，它反映了第 n 项 a_n 的值与项数 n 之间的关系．

作为例子，我们来分析数列 (2)，找出它的通项公式．在

数列(2)中每一项均为4.9加上9.8的若干倍，而在9.8前的系数恰好比项数少1. 这样，我们就可写出数列(2)的通项公式

$$a_n=4.9+(n-1)9.8.$$

我们再考虑一个数列

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \cdots. \tag{3}$$

首先可以看到，数列中每项的分子均为2的倍数，而分母均为以3为底的幂. 再仔细分析，我们看出，每一项的分子是2乘以项数，分母是以3为底，以项数为指数的幂，所以这个数列的通项公式是

$$a_n=\frac{2n}{3^n}.$$

有了通项公式，我们就可以求出数列中的任意一项. 例如我们要知道数列(3)的第10项，那么只要在通项公式中令$n=10$就得到

$$a_{10}=\frac{2\times 10}{3^{10}}=\frac{20}{59049}.$$

二、等 差 数 列

有一堆钢管共七层，最上一层有4根，最下一层有10根(见图8-1). 我们把每一层钢管的根数由上而下依次排列起来，就得到一个数列

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{4}$$

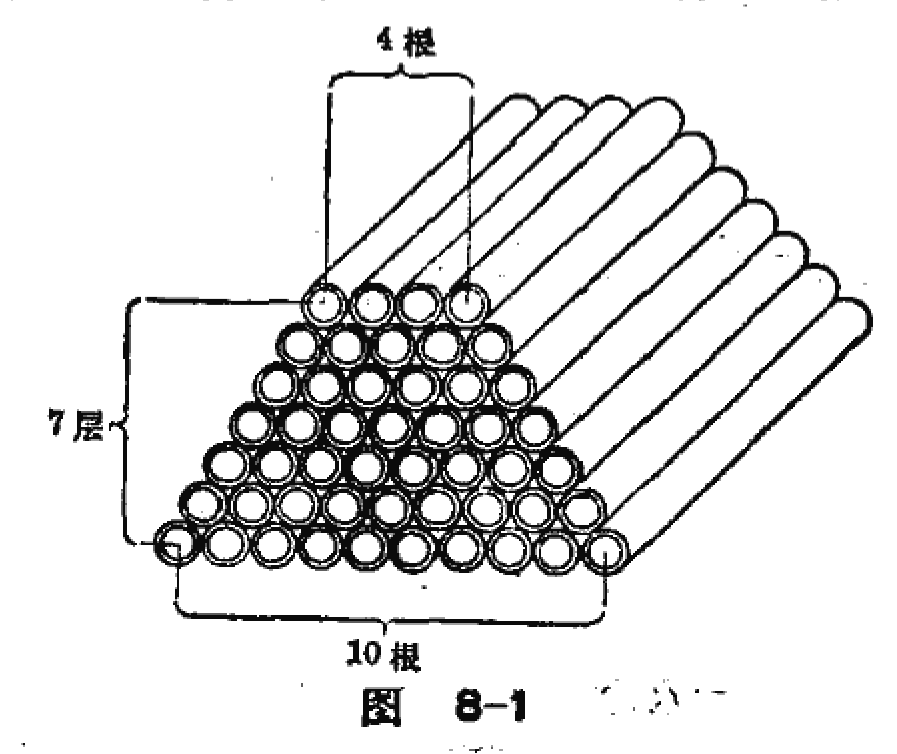


图 8-1

使一克水蒸发成水汽，所需要的热量，随着水本身的温度而变化. 1°C

时需要热量 596.4 卡；2°C 时需要热量 595.8 卡；3°C 时需要热量 595.2 卡；4°C 时需要热量 594.6 卡；……. 把这些热量的数值依次排列起来，我们又得到一个数列

$$596.4,\ 595.8,\ 595.2,\ 594.6,\ \cdots. \qquad (5)$$

分别从(4)、(5)两数列的第 2 项起，将每一项减去它前面的一项，对于数列(4)，

$$5-4=6-5=\cdots=10-9=1;$$

对于数列(5)，

$$595.8-596.4=595.2-595.8=594.6-595.2$$

$$=\cdots=-0.6.$$

由此看到数列(4)，(5)的共同特点是，从第 2 项起每一项减去它前面一项所得的差都等于一个常数（对于数列 (4) 这个常数为 1，对于数列(5)这个常数是 -0.6）.

具有这一特点的数列在实际问题中经常会遇到. 一般，若一个数列从第 2 项起，每一项减去它前面一项所得的差都等于某个常数，就把这个数列叫做等差数列，并把这个常数叫做等差数列的公差，用 d 表示. 下面，我们进一步研究这种数列.

先讨论等差数列的通项公式.

设数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$$

是一个等差数列，它的公差是 d，根据等差数列的定义得

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可得到等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

例如，对于数列 (4)，它的第 1 项为 $a_1=4$，公差 $d=1$. 代入等差级数的通项公式，得到

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 1,$$

即

$$a_n = 3 + n.$$

再考虑等差数列的求和问题.

例如求图 8-1 所示那堆钢管的根数，也就是求数列(4)中各项的和，我们用 S_7 来记，即

$$S_7 = 4+5+6+7+8+9+10.$$

设想在这堆钢管的旁边，把一堆数目相等的钢管倒堆上去，如图 8-2 所示，这样，每层钢管都是 4+10 根，7 层共有 7(4+10)根. 于是，图 8-2 所示钢管的总数为

$$2S_7 = 7(4+10),$$

即

$$S_7 = \frac{7(4+10)}{2} = 49.$$

从而我们求出了图 8-1 这堆钢管共 49 根.

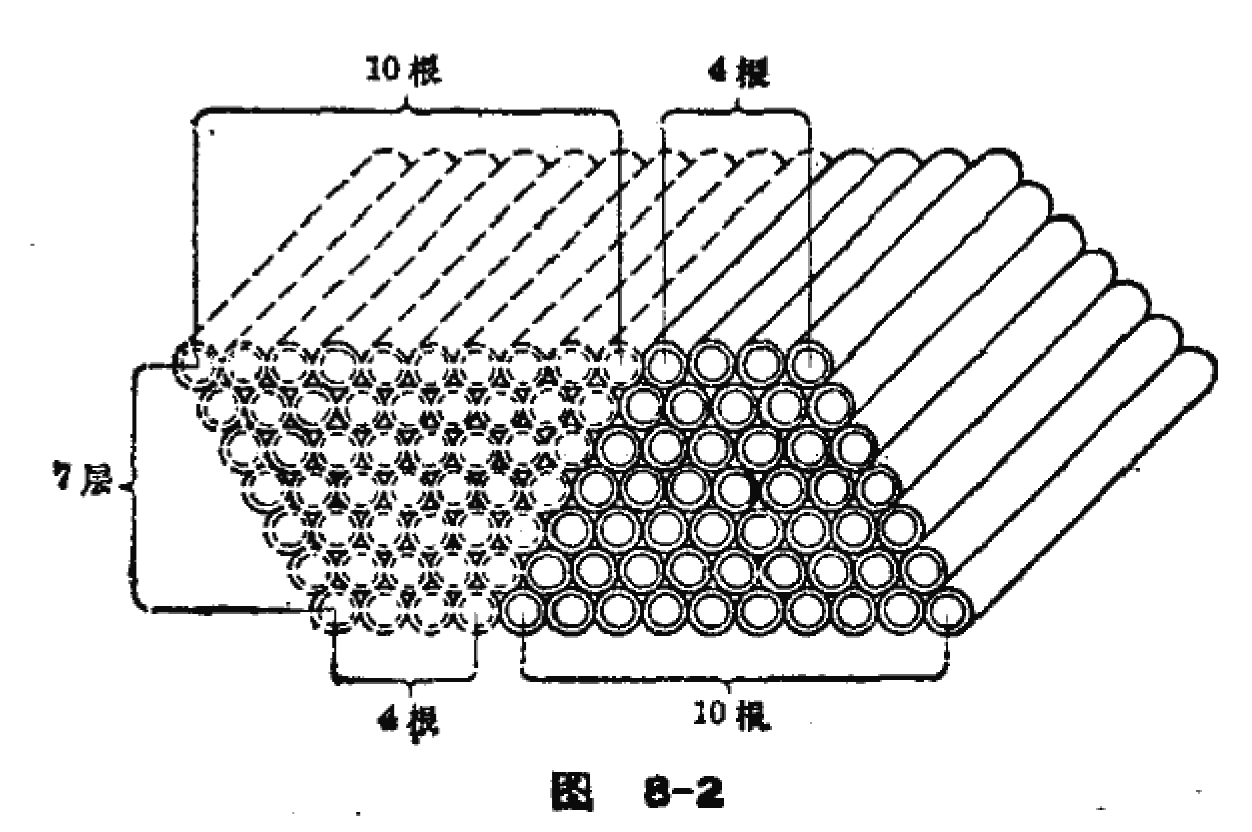


图 8-2

这个例子启发我们，为了求得一个等差数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{6}$$

前面 n 项的和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

我们先把前面 n 个项排成一个数列，再把这 n 个项按相反的顺序另外排成一个数列，这样得到两个数列

$$a_1,\ a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\ a_n, \tag{7}$$

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1, \tag{8}$$

设数列(6)的公差为 d，利用等差数列的通项公式，数列(7)，(8)可以写为

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(n-1)d,$$

$$a_n,\ a_n-d,\ a_n-2d,\ \cdots,\ a_n-(n-1)d,$$

从这一形式我们看到，上面两个数列中项数相同的两项之和均为常数 a_1+a_n. 等差数列的这一特性为我们计算它的前 n 项和带来了方便.

记数列(6)的前 n 项和为 S_n，那么

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \tag{9}$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \tag{10}$$

再把(9)和(10)两边分别相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)$$

$$=n(a_1+a_n),$$

所以

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

这就是等差数列前 n 项的求和公式.

[例 1] 一个剧场里有 25 排座位，第一排有 30 个座位，后面每一排都比前一排多出数目相同的座位，最后一排有 78

个座位.问这个剧场共有多少座位?

解：从第二排起，每一排都比前一排多出数目相同的座位，因而这剧场中各排座位的数目组成一个等差数列，把它记为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n.$$

根据题意，在这个数列中，已知 $n=25$, $a_1=30$, $a_{25}=78$, 待求的座位总数就是这个数列各项的和

$$S_{25}=a_1+a_2+\cdots+a_{25}.$$

利用前面导出的等差数列前 n 项的求和公式，得

$$S_{25}=\frac{25(30+78)}{2}=1350.$$

在研究等差数列时，一般要涉及到五个量：第一项 a_1、公差 d、项数 n、通项 a_n、前 n 项的和 S_n. 应用等差数列的通项公式与前 n 项的求和公式，只要知道其中任意三个的值，就可以求出其余两个的值. 在例 1 中，我们仅利用求和公式就求出未知值，但有些问题中，要同时使用求和公式与通项公式，才能得出未知值.

[例 2] 一架飞机俯冲投弹，炸弹从 880 米的空中落下，第 1 秒下落 31 米，以后每一秒都比前一秒多下落 9.8 米. 炸弹落到地面需要几秒?

解：从第二秒起，每一秒下落的距离都比前一秒多 9.8 米，因而炸弹到落地为止，每一秒钟下落的距离组成一个等差数列，记为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n.$$

在这个数列里，已知 $a_1=31$, $d=9.8$, $S_n=880$, 待求的是炸弹落地所需的秒数，就等于这个数列的总项数 n.

根据已知条件求 n 时，由于 a_n 也是未知量，所以单用通

项公式或前 n 项求和公式都不能求出，需要列出含有 a_n 与 n 的两个等式，为此必须将两个公式同时使用.这样得到 n 与 a_n 满足的方程组

$$\begin{cases} a_n=31+(n-1)9.8, \\ 880=\dfrac{n(31+a_n)}{2}, \end{cases}$$

消去 a_n，得到未知量 n 满足的一个方程

$$880=\frac{n}{2}[31+31+(n-1)9.8],$$

即

$$9.8n^2+52.2n-1760=0,$$

由此解出

$$n_1\approx 11, \quad n_2\approx -16.$$

炸弹落地的时间不能是负的，因此 -16 这个根应当舍去. 这样，我们求出炸弹落到地面所需要的时间为 11 秒.

三、等 比 数 列

除了我们上一段介绍的等差数列外，在实际问题中有时会遇到另外一种类型的数列，这类数列的特点是相邻两项的比是某个常数.

例如某种细菌每隔 30 分钟分裂一次，10000 个细菌经过 30 分钟、60 分钟、90 分钟、120 分钟、……分裂后的细菌数目，可以组成一个数列

$$20000,\ 40000,\ 80000,\ 160000,\ \cdots \qquad (11)$$

这个数列从第 2 项起，每一项和它前面一项的比都等于 2，

$$\frac{40000}{20000}=\frac{80000}{40000}=\cdots=2.$$

一个数列，若从第 2 项起，每一项和它前面一项的比都等

于某个常数，这个数列就叫做等比数列．这个常数叫等比数列的公比，用 q 表示．上面的数列(11)就是一个等比数列，它的公比 $q=2$．

对于等比数列的研究，可与等差数列完全类似地进行．

设数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{12}$$

是一个公比为 q 的等比数列，那么

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=a_1q^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此得到等比数列的通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

设等比数列(11)前 n 项的和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$

利用通项公式有

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \tag{13}$$

在(13)式的两边同乘以 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots+a_1q^n. \tag{14}$$

将(13)式的两边分别减去(14)式的两边，得

$$S_n-qS_n=a_1-a_1q^n,$$

即

$$S_n(1-q)=a_1(1-q^n).$$

当 $q\neq1$ 时，

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

这就是等比数列前 n 项的求和公式．

有了计算 a_n 与 S_n 的公式后，在等比数列的五个量（第

一项 a_1、公比 q、项数 n、通项 a_n、前 n 项的和 S_n)中，只要知道其中任意三个的值，就可以求出其余两个的值.

[例 3]　一个四级火箭，从最上面一级开始，每一级的重量是它下面一级的 $\frac{1}{10}$，设最下面一级的重量是 B 吨，求这个火箭的总重量.

解：这个四级火箭各级的重量组成一个等比数列．在这个数列里，$a_1=B$, $q=\frac{1}{10}$, $n=4$，待求的火箭总重量是这个数列各项的和 S_4.

把已知的 a_1, q, n 的值代入等比数列前 n 项的求和公式，得

$$S_4=\frac{B\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{10}}=1.111B.$$

从而我们求出这个火箭的总重量是 $1.111B$ 吨.

[例 4]　设等比数列的第一项是 $\frac{9}{8}$，最后一项是 $\frac{1}{3}$，而所有项的和是 $\frac{65}{24}$，求这个等比数列.

解：要写出这个等比数列，还需要知道 n 与 q．把已知条件 $a_1=\frac{9}{8}$, $a_n=\frac{1}{3}$, $S_n=\frac{65}{24}$，代入通项公式与前 n 项和的公式，得到

$$\begin{cases}\frac{65}{24}=\frac{\frac{9}{8}(1-q^n)}{1-q}, & (15)\\ \frac{1}{3}=\frac{9}{8}q^{n-1}, & (16)\end{cases}$$

将(16)式代入(15)式，得

$$\frac{65}{24}=\left(\frac{9}{8}-q\cdot\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-q},$$

从此解出

$$q=\frac{2}{3}.$$

再将所得 q 代入(16)式，得

$$\frac{1}{3}=\frac{9}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

上式两边同乘以 $\frac{8}{9}$，有

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

所以 $n-1=3$，即 $n=4$. 这样我们得到所求数列为

$$\frac{9}{8},\ \frac{9}{8}\times\frac{2}{3},\ \frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2},\ \frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3},$$

即

$$\frac{9}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}.$$

小　　结

1. 数列的通项公式用来表示数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

中通项 a_n 的值与项数 n 之间的关系.

2. 后项与前项之差等于某个常数的数列称为等差数列，这个常数称为等差数列的公差. 对于公差为 d 的等差数列，其通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d,$$

前 n 项的求和公式为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

3. 后项与前项之比等于某个常数的数列称为等比数列，这个常数称为等比数列的公比．对于公比为 q 的等比数列，通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1},$$

前 n 项的求和公式为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad (q\neq 1).$$

习　题

1. 写出下列数列:
   (1) 从小到大排列着的所有正的奇数;
   (2) 从大到小排列着的所有负的偶数;
   (3) 从 1 到 10 的自然数的常用对数.
2. 根据下列通项公式，写出数列的前五项:
   (1) $a_n=2n-1$;　　(2) $a_n=2n+1$;
   (3) $a_n=(-1)^n$;　　(4) $a_n=(-1)^{n-1}n$;
   (5) $a_n=\sqrt{n}$;　　(6) $a_n=\frac{n}{n+1}$;
   (7) $a_n=1+2n^2$;　　(8) $a_n=1+2+3+\cdots+n$.
3. 写出下列数列的通项公式，并求第 8 项:
   (1) $10, 20, 30, 40, \cdots$;　　(2) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$;
   (3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$;　　(4) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \cdots$.
4. 对于等差数列:
   (1) 已知 $a_1=4$, $d=-\frac{1}{2}$, 求 a_7;
   (2) 已知 $a_1=\frac{5}{6}$, $a_{10}=-\frac{5}{2}$, 求 S_{10};
   (3) 已知 $a_{15}=-10$, $S_{15}=360$, 求 a_1.
5. 计算下列和:
   (1) $1+2+3+\cdots+100$;　　(2) $13+15+17+\cdots+81$.

6. 一架飞机起飞时，第1秒滑跑2.3米，以后每一秒都比前一秒多滑跑4.6米，离地的前一秒滑跑66.7米．求这架飞机滑跑的时间．

7. 在夏季，山的高度每增加100米，气温就降低0.7°C。某次观测中，测得一座山的山顶的气温是14.8°C，山脚的气温是26.7°C，试求这座山的高度．

8. 在自由落体运动中，物体在下落的第1秒降落4.9米，以后每一秒比前一秒多降落9.8米。

   (1) 如果它从山顶落到下面，经过5秒钟着地，那么山高多少米？

   (2) 如果它从490米的高空落到地面，要经过几秒钟？

9. 对于等比数列：

   (1) 已知$a_1=\frac{4}{9}$，$q=-\frac{1}{3}$，求a_4；

   (2) 已知$a_1=5$，$q=1.6$，$a_n=134.2$，求n和S_n；

   (3) 已知$a_3=\frac{3}{2}$，$S_3=\frac{9}{2}$，求a_1和q．

10. 某种镭，经过25年重量减少一半，且每年的重量组成一个等比数列。一克这样的镭，经过一年重量是多少？

11. 一个生产队有水田512亩，现在计划把水田增加到1000亩，如果每年比上一年增加25%，需要几年才能完成？

第二节　排列与组合

一、排　　列

在生产实践中，人们经常要排列事物的顺序．例如，在果园中，把不同的果树嫁接；在锁厂中，把不同的弹子放入弹子锁的锁头铜芯中．这都是按一定的顺序排列事物．

几个事物的排列顺序，一般不只一种．例如按先后顺序发射具有红绿两种颜色的信号弹，可以有下面两种不同的顺序：

红 → 绿；　绿 → 红。

它们各自表示不同的信号．又如，某果园中有白桃、红桃、水蜜桃等三种不同的桃树，把任意两种桃树嫁接在一起，进行新品种培育实验．按照所取的砧木和芽的不同，可以试验以下六种不同的新品种：

白(芽) → 红(砧)；　白(芽) → 水(砧)；

红(芽) → 水(砧)；　红(芽) → 白(砧)；

水(芽) → 白(砧)；　水(芽) → 红(砧)．

这两个例子，前一个是从 2 个元素(红、绿两种信号弹)里每次取 2 个元素，按一定顺序排成一列；后一个是从 3 个元素(白桃、红桃、水蜜桃)里每次取 2 个元素，按照一定的顺序排成一列．一般，从 n 个不同的元素里取 m 个元素，且按一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素里取 m 个元素的一种排列．

从 n 个不同的元素里取 m 个元素的一种排列，可以看成通过以下两步得到：

(1) 从 n 个元素中取出 m 个元素；

(2) 把取出的元素按一定顺序排列．

我们说两个排列是不同的，这指的是，第一，这两个排列中至少有一个元素不相同，例如 abc 与 abd 是不同的排列；第二，虽然这两个排列的元素相同，但排列的次序不同，例如 abc 与 acb 也是不同的排列．两种排列只有当取出的元素完全一样，并且排列顺序也完全相同时，才算是相同的排列．

从 n 个不同的元素里每次取 m 个元素的所有不同的排列数，用记号 A_n^m 表示．例如从我们前面举的关于信号弹的例子有 $A_2^2=2$，关于桃树嫁接的例子有 $A_3^2=6$．下面我们就来考虑一般的 A_n^m 的计算公式．

在此之前，我们先来考虑一个简单而又有启发性的问题：

若从甲村到乙村有两条路，从乙村到丙村有三条路，问从甲村到丙村可以有多少种走法？

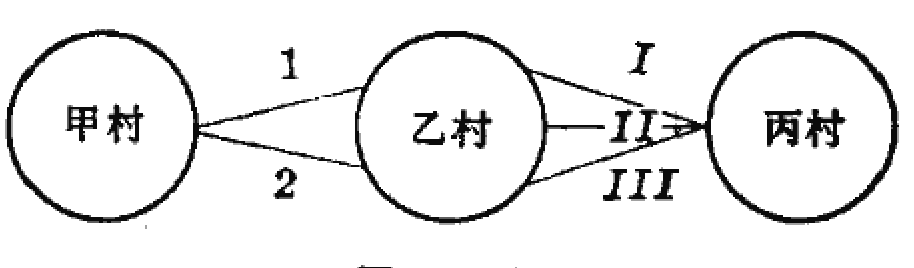


图 8-3

从图 8-3 的示意图中可见，我们从甲村到乙村走第 1 条路时，再从乙村到丙村可以走第 I 条路、第 II 条路、第 III 条路；同样，从甲村到乙村走第 2 条路时，再从乙村到丙村也还是有三种走法．这样，从甲村到丙村就共有 $2\times3=6$ 种走法．（请读者考虑一下，这里为什么是 2×3，而不是 $2+3$.）

从这里可以总结出一个计算方法，若完成第一件事有 r 种做法，完成第一件事再去完成第二件事又有 s 种做法，那么，完成这两件事的做法应该有 rs 种．一般，连续完成几件事的做法总数，等于依次完成各件事的做法数的乘积．

下面，我们来考虑 A_n^m 的计算公式．

如果从 n 个元素里每次取出 1 个元素来排列，显然共有 n 种不同排列法．这就是说，从 n 个元素里每次取 1 个元素的排列数等于 n，即

$$A_n^1=n.$$

如果从 n 个元素里每次取 2 个元素来排列，那么，取第一个元素时可以有 n 种不同的取法，当它取定后，第二个元素是在剩下的 $n-1$ 个元素中选取，故有 $n-1$ 种取法．这样，根据刚才提到的计算方法，从 n 个元素里每次取 2 个元素的排列数，应等于这两个取法数的乘积，即

$$A_n^2=n(n-1).$$

如果从 n 个元素里每次取三个元素来排列，那么，第一个元素有 n 种取法；在它取定后，第二个元素有 $n-1$ 种取法；前

两个元素取定后再取第三个元素时，只有 $n-2$ 种取法了．于是，从 n 个元素里每次取 3 个元素的排列数，应等于这三个取法数的乘积，即

$$A_n^3=n(n-1)(n-2).$$

一般地，运用这种方法，可推得从 n 个不同元素里每次取 m 个元素的所有不同的排列数为

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

从 n 个元素里取 n 个元素的排列叫全排列，用 P_n 表示全排列的种数．利用 A_n^m 的计算公式有

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

自然数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的阶乘，用记号 $n!$ 表示，因此求全排列的公式可简写成

$$P_n=n!.$$

同时，由于

$$\begin{aligned}A_n^m&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\cdots\cdot2\cdot1}{(n-m)(n-m-1)\cdots\cdot2\cdot1},\end{aligned}$$

所以 A_n^m 可以用阶乘记号表示为

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

[例1] 计算：

(1) $A_8^4-2A_8^3$；　　(2) $\dfrac{A_{10}^3P_7}{10!}$.

解：(1) $A_8^4-2A_8^3=8\times7\times6\times5-2\times8\times7\times6$

$$=(5-2)\times8\times7\times6=1008;$$

(2) $\dfrac{A_{10}^3P_7}{10!}=\dfrac{10\times9\times8\times7!}{10!}=\dfrac{10!}{10!}=1,$

或利用

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

有

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!},$$

于是

$$\frac{A_{10}^3 P_7}{10!}=\frac{\frac{10!}{7!}\times 7!}{10!}=1.$$

[例 2] 一条铁路线上有 10 个车站，问一共需要多少种不同的车票？

解：因为每种车票只能适用于从一个车站到另一个车站，而且从甲站到乙站的车票也不同于从乙站到甲站的车票，所以，如果把 10 个车站看成 10 个元素，从一个车站到另一车站的车票就可以看成是 10 个元素中取出两个元素的一种排列．因此，这个问题就归结为求从 10 个元素中每次取出两个元素的排列数，于是，所求的车票数等于 A_{10}^2，计算得

$$A_{10}^2=10\times 9=90,$$

即一共需要 90 种不同的车票．

[例 3] 用 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个数字，可以组成多少个没有重复的三位数？

解：这个题目不只一种解法，下面从三个不同的角度来分析这个问题．

(1) 因为三位数的百位数不能是零，所以百位数上数字的选法有 9 种，而每当百位上的数字选好后，其余两个数位上的数字的选法共有 A_9^2 种，因此，所求的三位数有 $9\times A_9^2$ 个，即

$$9\times 9\times 8=648 \text{ 个}.$$

(2) 从 10 个不同的数字里每次取 3 个数字的排列数是

A_{10}^{3}. 这些排列里包括两类：一类是以零为排头的排列，有 A_9^2 种；另一类不是以零为排头的排列. 后面的排列所组成的三位数是符合要求的. 因此，所求的三位数的个数为

$$A_{10}^{3}-A_9^2=10\times9\times8-9\times8=9\times9\times8=648\text{ 个}.$$

(3) 因为百位数不能是零，先把零放在一边. 每一位都不含有零的三位数有 A_9^3 个，这些数是符合要求的一部分，另外一部分是零在十位或个位上的三位数. 这一部分可以这样计算：在不含有数字零的两位数的中间或末尾放上数字零，使它构成三位数（例如 102 或 120 等），而不含有数字零的两位数共有 A_9^2 个，因此这部分三位数共有 $2\times A_9^2$ 个. 由此我们得到所求的三位数一共有

$$A_9^3+2A_9^2=9\times8\times7+2\times9\times8=9\times9\times8=648\text{ 个}.$$

上面这个例子的三种解法是比较常用的方法，我们不仅要搞清楚这个例子，同时还要掌握这种分析问题与解决问题的方法.

二、组　　合

前面我们讨论了排列问题，在此基础上我们来讨论组合问题.

例如，甲、乙、丙三个球队进行单循环赛，一共要进行三场：

甲对乙；　甲对丙；　乙对丙.

每场比赛只跟哪两个队参加有关，而与这两个队的排列顺序无关. 也就是说，“甲对乙”的比赛与“乙对甲”的比赛是同一次比赛. 这里的每一次比赛我们可以看做是从 3 个元素里取 2 个元素的一种组合.

一般地说，从 n 个不同的元素里每次取出 m 个元素，不

管怎样的顺序组成一组，叫做从 n 个元素里每次取 m 个元素的一种组合.

从排列与组合的涵义可以知道："从 n 个元素里每次取出 m 个元素的排列"与"从 n 个元素里每次取 m 个元素的组合"的区别在于：前者不仅与所取的元素有关，而且与元素的排列顺序有关；后者只与所取的元素有关，而与元素的排列顺序无关.

我们用 C_n^m 表示从 n 个元素里每次取出 m 个元素的所有不同的组合种数.

组合与排列是密切联系着的，我们先考虑 C_n^m 与 A_n^m 的关系，从中找出 C_n^m 的计算公式.

例如从 a、b、c 里每次取 2 个字母的组合有 3 种：

$$ab、\quad ac、\quad bc.$$

而从 a、b、c 里每次取 2 个字母的排列有 6 种：

$$ab、\quad ba、\quad ac、\quad ca、\quad bc、\quad cb.$$

比较上面的组合与排列可以看出，把 3 种组合的每一种组合的 2 个字母进行全排列，就得出 6 种排列.

这就表明，从 3 个元素里每次取 2 个元素的组合数 C_3^2，乘以每一种组合里 2 个元素的全排列数 P_2，就等于从 3 个元素里每次取 2 个元素的排列数 A_3^2，用式子表示就是

$$C_3^2 \cdot P_2 = A_3^2.$$

一般地，有

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

这是因为，如果把每一种这样的组合里的所有元素排成不同的顺序，就可以得到 P_m 个排列，现在有 C_n^m 种组合，所以一共有 $C_n^m \cdot P_m$ 种排列，而这些排列种数就是 A_n^m.

有了这些关系后，应用 A_n^m，P_m 的计算公式就可以得到

计算C_n^m的公式

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

由于

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

所以 C_n^m 也可用阶乘记号表示为

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

下面，我们介绍关于组合的两个性质。

若从 n 个人里派 m 个人参加劳动，其余 $n-m$ 个人留下，一共有多少种不同的分配方法呢？一方面，如果参加劳动的人员已定，这个分配方案也随之决定了，而在 n 个人里面派 m 个人参加劳动有 C_n^m 种方法，于是问题的解答为 C_n^m；另一方面，如果留下的人员已定，分配方案也同样决定了，而在 n 个人里面指定 $n-m$ 个人留下有 C_n^{n-m} 种方法，于是问题的解答应为 C_n^{n-m}. 从两个角度得到的问题的解当然一致，就得

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$

这就是我们所要介绍的组合的第一条性质，这个性质也可以用组合数的计算公式证明如下.

证明：因

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!}=\frac{n!}{(n-m)!m!},$$

所以

$$C_n^m=C_n^{n-m}.$$

这条性质可以简化组合数的计算. 例如，运用这个公式，有 $C_{100}^{98}=C_{100}^2$，而计算 C_{100}^2 显然较计算 C_{100}^{98} 简便. 这样

$$C_{100}^{98}=C_{100}^{2}=\frac{100\times 99}{2\times 1}=4950.$$

下面介绍组合的另一性质.

n 个乒乓球队参加的单循环赛，要进行 C_n^2 场. 如果增加一个队，就要增加这个队与原来 n 个队的 C_n^1 场比赛. 于是，这 $n+1$ 个乒乓球队进行单循环赛的场次 C_{n+1}^2 应等于上面列举的两种场次的总和，即

$$C_n^2+C_n^1=C_{n+1}^2.$$

一般，我们可推得组合的另一性质

$$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m.$$

现在运用组合数的计算公式证明如下。

证明：

$$\begin{aligned}C_n^m+C_n^{m-1}&=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!\,[n-(m-1)]!}\\&=\frac{n!\,(n+1-m)+n!\,m}{m!\,(n+1-m)!}\\&=\frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n+1-m)!}\\&=\frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!}\\&=C_{n+1}^m.\end{aligned}$$

[例 4] 计算 C_7^3, C_{200}^{198}, $C_{99}^3+C_{99}^2$.

解：

$$C_7^3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35,$$

$$C_{200}^{198}=C_{200}^{2}=\frac{200\times 199}{2\times 1}=19900,$$

$$C_{99}^3+C_{99}^2=C_{100}^3=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161700.$$

[例 5] 求证 $C_n^{m-1}+C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=C_{n+1}^m$.

证：$$\begin{aligned}&C_n^{m-1}+C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}\\&=C_n^{m-1}+(C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1})\\&=C_n^{m-1}+C_n^m\\&=C_{n+1}^m.\end{aligned}$$

［例 6］ 某一条航线上共有 10 个航空站，问这条航线上共有多少种不同的飞机票？如果不同的两站间的票价都不同，那么有多少种不同的票价？

解：从甲站到乙站的飞机票与从乙站到甲站的飞机票是不同的，但这两种飞机票的价格是一样的．所以题目中前者属于排列问题，而后者属于组合问题．这样，所求的飞机票的种数有

$$A_{10}^2=10\times 9=90 \text{（种）}.$$

飞机票的价格有

$$C_{10}^2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45 \text{（种）}.$$

［例 7］ 从三个女同学、四个男同学里，选出二个女同学、一个男同学组成三人宣传组，一共有多少种选法？

解：选出的三个人里要有二个女同学和一个男同学．先就选出的二个女同学来说，有 C_3^2 种方法，而无论用那种方法选出两个女同学后，再选一个男同学的方法有 C_4^1 种，所以选出所要求的三个人组成小组的方法一共有

$$C_3^2\cdot C_4^1=3\times 4=12 \text{（种）}.$$

［例 8］ 全校的篮球比赛先分三个大组进行，每组有 8 个队．每组中各队进行单循环赛，得出第一、二名后，再把各组的前二名集中在一起（共 6 个队）进行第二轮比赛．在第二轮比赛中，除了第一轮比赛中已经赛过的两队外，每个队都应和其它队比赛一次，问先后共比赛多少次？

解：在第一轮比赛中每个组共要比赛

$$C_8^2=\frac{8\times7}{2\times1}=28\ (次),$$

三个组共比赛

$$3\times C_8^2=3\times28=84\ (次).$$

在第二轮比赛中，如果各队都要相互比赛一次，那就共有

$$C_6^2=\frac{6\times5}{2}=15\ (次),$$

但原在同一大组中的两个队已在第一轮中比赛过，就不再举行比赛，所以三个组共除去三次，这样总共比赛次数为

$$3\times C_8^2+(C_6^2-3)=96\ (次).$$

小　结

1. 计算排列数的根据是：如果完成第一件事有 r 种做法，在它完成后，再去完成第二件事又有 s 种做法，那么，完成这两件事共有 rs 种做法.

2. 从 n 个元素里每次取 m 个元素的排列数为

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

特别，n 个元素的全排列数为

$$P_n=A_n^n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

3. 排列不仅与所取元素有关，而且与元素的排列顺序有关；而组合只与所取元素有关，与元素的排列顺序无关.

4. 从 n 个元素里每次取 m 个元素的组合数为

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}.$$

5. 组合有如下性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m},$$

$$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m.$$

习　题

1. 写出:

(1) 从 5 个元素 a、b、c、d、e 里每次取 2 个元素的所有排列;

(2) 3 个元素 A、B、C 的所有全排列.

2. 计算下列各数:

(1) A_{10}^4;　　(2) $A_8^4-3A_8^3$;

(3) $\dfrac{A_{15}^9}{A_9^9}$;　　(4) $\dfrac{A_{30}^{20}}{A_{27}^{17}}$;

(5) $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}$;　　(6) $P_8-7P_7-6P_6$;

(7) $\dfrac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}$;　　(8) $\dfrac{A_7^5-P_6}{6!+5!}$.

3. 求证下列等式:

(1) $A_2^2+A_3^2+A_4^2=A_5^3$;　　(2) $A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$.

4. 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成多少个没有重复数字的五位数; 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字的五位数?

5. 有红、黄、绿、蓝四颗信号弹, 若用不同的个数以及不同的颜色顺序表示不同的信号, 问这四颗信号弹能表示多少种不同的信号?

6. 一个火车站有 8 股岔道, 每股岔道上可以停放一列火车. 要停放四列火车, 有几种不同的放法.

7. 连续五次射击, 把每次命中与否按顺序记录下来, 可能出现多少种结果? 2 次射中其它 3 次不中的结果又有多少种?

8. 计算下列各数:

(1) C_{15}^3;　　(2) C_{200}^{197};

(3) $C_7^3-C_6^2$;　　(4) $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$.

9. 求证下列各式:

(1) $C_6^3=2C_5^3$;　　(2) $C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$;

(3) $C_n^m=\dfrac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$;　　(4) $C_n^m=\dfrac{m+1}{n-m}C_n^{m+1}$.

10. 从 100 件产品中抽 4 件检查, 有多少种不同的抽取方法? 某一件产品恰巧被抽取出来的取法有多少种?

11. 乒乓运动员 11 人中，男运动员 5 人，女运动员 6 人，若从这 11 人里选 4 人进行男女混合双打比赛，一共有多少种选法？

12. 用天平称物体的重量时，一个盘里放物体，另一个盘里放砝码. 如果有 7 个砝码，重量分别是 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克、32 克、64 克，问可以称多少种不同重量的物体？

13. 平面上有 8 个点，其中任意三个点都不在一条直线上，如果每过两点作一条直线，可以作多少条？若其中有三个点在一直线时，所作直线比原来少几条？

14. 把连续 6 次射击的命中与否记录下来，问恰好命中 3 次的结果有多少种？如果又知道命中的 3 次中恰好有 2 次连在一起，这种结果又有多少种？

第三节　数学归纳法和二项式定理

一、数学归纳法

毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"例如我们考虑 A_n^m 的计算公式时，先看到

$$A_n^1=n,$$
$$A_n^2=n(n-1),$$
$$A_n^3=n(n-1)(n-2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

然后我们归纳到一般情形

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

在生产实践和科学研究中，这是一种经常使用的方法.

但是仅仅根据几个特殊例子就归纳出一般的结论，有时并不一定正确. 例如，当 $n=1$ 时，代数式 n^2+n+17 的值 19 是个质数(一个正整数，除了它本身和 1 以外，不能被其它正

整数除尽，这个数就称为质数）；当 $n=2, 3, \cdots, 15$ 时，这个代数式 n^2+n+17 的值为 23、29、37、…、257，它们都是质数．如果由此我们得出结论，说 n 等于任意自然数时，这个代数式的值总是质数，那就错了．因为当 $n=16$ 时，$n^2+n+17=16^2+16+17=289=17^2$ 就不是质数．

因此，从特殊情况中归纳出的一般性的数学结果，一般还需进一步判断它是否成立．在这一节中，我们将介绍推断这种数学结果成立的一种重要方法——数学归纳法．

我们先来看一个具体例子．记

$$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1),$$

容易验证，$S_1=1=1^2$，$S_2=1+3=2^2$，$S_3=1+3+5=3^2$，$S_4=1+3+5+7=4^2$，…．于是，我们就想进一步判断

$$S_n=n^2 \tag{1}$$

是否对一切自然数 n 成立．

虽然，我们已对 $n=1, 2, 3, 4$ 验证了等式(1)成立，但不可能对一切自然数 n 一一地去验证，因此，为了推断 $S_n=n^2$ 对一切自然数 n 成立，必须在验证个别情形的基础上，提出其它补充办法．现在，我们就来介绍解决这个问题所需要的两个步骤．

第一步，验证等式(1)当 $n=1$ 时成立．

当 $n=1$ 时，等式左端为 $S_n=1$，右端为 $n^2=1^2=1$，所以 $S_n=n^2$ 成立．

第二步，假设等式(1)在 n 等于某个自然数 k 时成立，即

$$S_k=k^2, \tag{2}$$

由此来推导等式(1)对于 $n=k+1$ 也成立，即由(2)导出下式：

$$S_{k+1}=(k+1)^2. \tag{3}$$

因为

$$S_{k+1}=1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$$
$$=[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)$$
$$=S_k+2k+1,$$

把假设成立的等式(2)代入，即得

$$S_{k+1}=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

所以等式(3)也成立.

这里，所做的第一步验证了等式 $S_n=n^2$ 对 $n=1$ 成立；所做的第二步告诉我们，如果 $S_n=n^2$ 对某个 $n=k$（自然数）成立，就能推断出 $S_n=n^2$ 对 $n=k+1$ 也成立.

通过这两个步骤，我们就能说明 $S_n=n^2$ 对一切自然数 n 都成立. 这是因为，既然已验证了 $S_n=n^2$ 对 $n=1$ 成立，由第二步就能推出它对 $n=2$ 也成立；同样，既然 $S_n=n^2$ 对 $n=2$ 成立，由第二步就能推出它对 $n=3$ 也成立；这样，一步步地依次类推，就能推出 $S_n=n^2$ 对任意自然数 n 都成立.

象上面这样的证题方法叫做数学归纳法. 一般，用数学归纳法证明某个数学结果对任何自然数 n 成立，其步骤为

(1) 验证当 $n=1$ 时结果成立；

(2) 假设这个结果在 n 等于任一自然数 k 时成立，由此推出它对 $n=k+1$ 也成立.

必须注意，只有通过以上两个步骤，才算是用数学归纳法完成了证明. 这两个步骤是缺一不可的. 如果缺了第一个步骤，第二个步骤就失去了讨论问题的基础，这样也就无法在 $n=1$ 的基础上，逐次运用第二个步骤来说明数学结果对任意自然数 n 成立；同样，如果缺少了第二个步骤，那就只验证了 $n=1$ 这个特殊情况，即使再验证一些特殊情况，也无法得到一般性的结论.

[例 1]　证明下式对一切自然数 n 成立：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \tag{4}$$

证：(1) 当 $n=1$ 时，等式 (4) 两边都等于 1，故等式 (4) 对 $n=1$ 成立.

(2) 假设等式(4)在 $n=k$ 时成立，即

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2.$$

对于 $n=k+1$，等式(4)左边为

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k^2+4(k+1)]\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2(k+2)^2\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2,\end{aligned}$$

而对于 $n=k+1$，等式右边为

$$\left\{\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]\right\}^2=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2,$$

所以等式(4)当 $n=k+1$ 时也成立. 于是证明了等式(4)对一切自然数成立.

二、二项式定理

现在我们来讨论 $(a+b)^n$ 的展开问题. 我们已经知道

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \tag{5}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \tag{6}$$

将 $(a+b)^3$ 的展开式两边乘上 $(a+b)$ 就得到

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4. \tag{7}$$

同样，将 $(a+b)^4$ 的展开式两边乘上 $(a+b)$ 就得到

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5. \qquad (8)$$

为了找出 $(a+b)^n$ 的展开公式，我们先对上面几个展开式进行分析.

从上面几个等式，我们看到二项式的展开式有如下特征：

(1) 各式中右边的项数等于左边的二项式指数加上1. 如(5)式中左边的二项式指数为2，右边的项数为3；(6)式中指数为3，项数为4.

(2) 展开式中第1项 a 的指数等于二项式的指数，以后各项中 a 的指数依次减少1，直到等于0为止；而且，第1项 b 的指数等于0，以后各项中 b 的指数依次增加1，直到等于二项式的指数为止. 这样，每一项中 a 的指数加上 b 的指数都等于二项式的指数. 如在(7)式中由第1项至第5项，a 的指数依次为4，3，2，1，0；b 的指数依次为0，1，2，3，4，各项的指数之和都等于二项式的指数4.

(3) 展开式中各项的系数，第一项等于1，其它依次等于以二项式的指数为元素总数，每次取1，2，… 个元素的组合数. 例如(8)式中6个系数依次为：

$$1,\ C_5^1=5,\ C_5^2=10,\ C_5^3=10,\ C_5^4=5,\ C_5^5=1.$$

综合上面的分析，如果我们规定

$$C_n^0=1,$$

就可以写出 $(a+b)^n$ 的展开式，得到

二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n. \qquad (9)$$

证明 我们用数学归纳法.

(1) 当 $n=1$ 时，等式(9)的左边为

$$(a+b)^1=a+b,$$

而等式(9)的右边是

$$C_1^0a+C_1^1b=a+b,$$

于是等式(9)当 $n=1$ 时成立.

(2) 设 $n=k$ 时,等式(9)成立,即

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k.$$

现在证明等式(9)对 $n=k+1$ 亦成立.

当 $n=k+1$ 时,等式(9)的左边是

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^k(a+b)\\&=(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+C_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+C_k^kb^k)(a+b)\\&=C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+C_k^2a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^kab^k\\&\qquad+C_k^0a^kb+C_k^1a^{k-1}b^2+C_k^2a^{k-2}b^3+\cdots+C_k^kb^{k+1}\\&=C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb+(C_k^2+C_k^1)a^{k-1}b^2+\cdots+C_k^kb^{k+1}.\end{aligned}$$

根据 $C_n^0=1$ 的规定及 C_n^1、C_n^n 的计算公式,易知

$$C_k^0=C_{k+1}^0(=1),\ C_k^k=C_{k+1}^{k+1}(=1),\ C_k^1+C_k^0=C_{k+1}^1(=k+1).$$

再利用组合的第二个性质,得

$$C_k^0=C_{k+1}^0,\ C_k^1+C_k^0=C_{k+1}^1,\ C_k^2+C_k^1=C_{k+1}^2,\ \cdots,\ C_k^k=C_{k+1}^{k+1},$$

所以

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+C_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\cdots+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1},$$

上式右边恰好就是等式(9)当 $n=k+1$ 时右边的展开式,所以等式(9)对于 $n=k+1$ 亦成立.

这样,根据归纳法我们知道等式(9)对任意自然数 n 均成立.

[例 2] 求 $(a+3)^5$.

解:
$$\begin{aligned}(a+3)^5&=a^5+C_5^1a^4\cdot3+C_5^2a^3\cdot3^2+C_5^3a^2\cdot3^3+C_5^4a\cdot3^4+3^5\\&=a^5+15a^4+90a^3+270a^2+405a+243.\end{aligned}$$

[例 3] 一个螺旋桨在某种情况下转动时,它所消耗的

功率 P(马力)和螺旋桨直径 d(米)的关系是

$$P=6d^5,$$

已知 $d=3.1$ 米，求 P(精确到 100 马力).

解：把 d 的值代入公式，得

$$P=6\times3.1^5.$$

为了求 P 的值，可以把 3.1^5 写作 $(3+0.1)^5$，应用二项式定理展开，得

$$\begin{aligned}P&=6(3+0.1)^5\\&=6(3^5+C_5^1\times3^4\times0.1+C_5^2\times3^3\times0.1^2\\&\quad+C_5^3\times3^2\times0.1^3+C_5^4\times3\times0.1^4+0.1^5)\\&=6(243+40.5+2.7+\cdots).\end{aligned}$$

$(3+0.1)^5$ 的展开式，从第三项起，以后各项的和与 6 相乘的积小于 100，可以略去．所以根据所需精确度，有

$$P=6(243+40.5)=1701\ (马力).$$

而在所允许的精确度下，取 $P=1700$(马力)，即为螺旋桨转动时所消耗的功率.

小　结

1．用数学归纳法证明某个数学结果对任意自然数 n 成立，其步骤为

(1) 验证 $n=1$ 时结果成立；

(2) 假设结果当 $n=k$(自然数)时成立，推出它对 $n=k+1$ 也成立.

2．二项式定理为

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n,$$

其中

$$C_n^0=1.$$

习　题

1. 用数学归纳法证明下列结果：

(1) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

(4) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

2. 用数学归纳法证明多项式

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

的展开式有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个项.

3. 用数学归纳法证明

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1.$$

4. 写出下列各式的展开式：

(1) $(x+2)^6$;　　　　(2) $\left(1-\frac{x}{3}\right)^4$.

5. 求 $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7$ 的展开式中不含 x 的项.

6. 求下列各式的值(精确到 0.01)：

(1) 1.003^7;　　　　(2) 2.998^8.

复　习　题

1. 写出下列数列的前四项：

(1) $a_n=2+3n$;　　　　(2) $a_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;

(3) $a_n=\frac{x^n}{n!}$;　　　　(4) $a_n=C_{10}^n p^n(1-p)^{10-n}$;

(5) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$;　　　　(6) $a_n=x+2x^2+\cdots+nx^n$.

2. 什么叫做等差数列和等比数列，并用数学归纳法证明它们的求和公式.

3. 用抽水机抽坑里的水，抽最上面1分米深的水需10分钟，以后每抽1分米深的水，需要增加2.5分钟．如果坑里水深1.2米，将其全部抽完要多少时间？

4. 用漆包线绕成一个多层线圈，第一层用线6.44米，以后每一层都比前一层多用线0.16米，最后一层用线7.24米．问绕这个线圈共用去漆包线多少米？

5. 用某个电流计测量电流时，指针在它应该指示的刻度（作为平衡位置）左、右摆动．指针各次离开平衡位置的最大距离组成一个等比数列，这个数列的第1项是24毫米，公比是$\frac{1}{2}$，求摆动到第5次时指针离开平衡位置的最大距离．

6. 当n无限增大时，和数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

趋于何值？

7. 已知等比数列中$a_1=8$, $q=1.5$, $S_n=65$, 求n和a_n.

8. 举例说明排列与组合的不同？

9. 利用二项式定理计算下列的数：

(1) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$;　　(2) $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+\cdots+2^nC_n^n$.

10. 如果挂起不同数量或不同顺序的信号旗，表示不同的信号，那么用5面不同颜色的信号旗，可以表示多少种信号？

11. 用一定数量的红、黄、蓝、白四种颜料来调色，可以得到多少种颜色？

12. 在10件产品中抽样两次，第一次抽5件检验，第二次抽3件检验，现在问

(1) 若第一次抽取的产品不放回，一共有多少种抽取方法？

(2) 若第一次抽取的产品放回，一共有多少种抽取方法？

13. 证明下列等式：

(1) $A_{10}^4=A_{10}^2A_8^2$;　　(2) $A_{10}^4=A_9^4+4A_9^3$;

(3) $A_n^{m+p}=A_n^mA_{n-m}^p$;　　(4) $A_{n+1}^p=A_n^p+pA_n^{p-1}$.

14. 用数学归纳法证明第9题中(2)的结果．

15. 用数学归纳法证明

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$$

(证明中用到第三节习题 3 的结果).

16. 求下列各式的展开式:

(1) $\left(1+\frac{x}{3}\right)^4$;　　(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}a\right)^6$.

17. 光线通过透镜时会发生反射，损失一部分能量，使光线减弱. 某种仪器有 8 个透镜，如果光线通过每个透镜损失 $\frac{1}{10}$ 的能量，那么，单位时间内，进入仪器的光线能量 E_0 和从仪器射出的光线能量 E 之间的关系是

$$E=E_0\left(1-\frac{1}{10}\right)^8,$$

求 E/E_0 (精确到 0.01).

第九章 复　　数

第一节 复数及其表示

一、复数的概念

在讨论一元二次方程的根时，我们曾引入复数的概念.

记号 i 表示一个满足条件

$$i^2=-1$$

的数. 由于任何实数的平方不会是负数，所以 i 是区别于实数的一种新的数，表示 -1 的平方根.

引入 i 这个记号后，一元二次方程

$$Ax^2+Bx+C=0 \quad (A\neq 0)$$

当 $B^2-4AC<0$ 时的解可以写为

$$x_1=-\frac{B}{2A}+\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}i, \quad x_2=-\frac{B}{2A}-\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}i.$$

x_1 与 x_2 都是形如

$$a+bi$$

的数，这里 a 与 b 都是实数.

一般地，把形如 $a+bi$ 的数称做复数，其中 a 和 b 都是实数，依次称做复数的实部和虚部. 由于 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就变成了实数 a，所以实数是复数的特殊情况，而复数是实数的推广.

这里要注意，实数有次序关系，就是说，对任意两个实数，

可以比较它们的大小，但对于复数，这种关系不存在.

我们规定，两个复数，如果它们的实部和虚部分别相等，就称这两个复数相等. 反过来，两个复数相等，就意味着它们的实部和虚部分别相等.

作为特例，一个复数 $a+bi$，如果 $a=0$，$b=0$，就说 $a+bi=0$；反过来，如果 $a+bi=0$，就意味着 $a=0$，$b=0$.

下面讨论复数的几何表示.

先讨论怎样用复数表示平面上的点.

考虑平面直角坐标系. 我们约定，用横轴表示实部，用纵轴表示虚部，于是复数 $a+bi$ 就表示坐标平面上的点 $M(a,b)$（图 9-1）. 这样，坐标平面上每一点都对应一个复数；反之，每一复数也对应坐标平面上的一个点. 例如在图 9-2 中，坐标平面上的点 $M_1(3,2)$ 和 $M_2(-1,0)$ 可以依次用复数 $3+2i$ 和 -1 来表示，而复数 $-2-i$ 和 $-2i$ 可以依次表示坐标平面上的点 M_3 和 M_4. 今后，我们把表示复数的平面叫复平面.

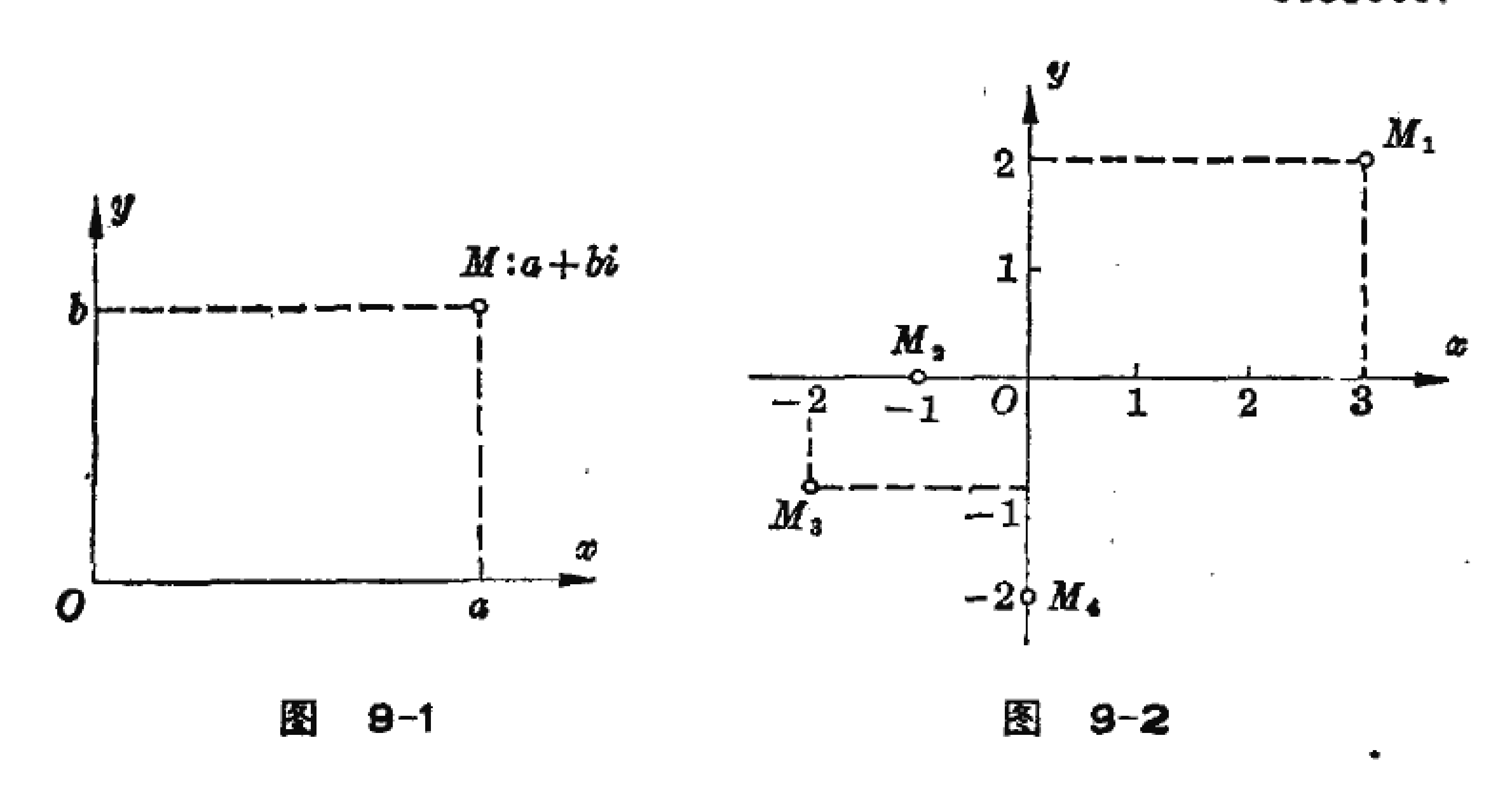


图 9-1　　　　图 9-2

为了适应于电工学、力学等方面的需要，还要进一步用复数来表示平面上的向量. 在坐标平面上，以坐标原点 O 为起点、$M(a, b)$ 点为终点，具有方向的线段称为一个向量，

记为 $\overrightarrow{OM}$. 很明显，向量 $\overrightarrow{OM}$ 是和点 M 相对应的，因此我们可以用复数 $a+bi$ 来表示向量 $\overrightarrow{OM}$（图 9-3）. 这样，我们就建立了以坐标原点为起点的向量与复数之间的对应关系. 例如，两复数 $z_1=2-i$ 和 $z_2=-2+i$ 分别表示图 9-4 中两个向量 $\overrightarrow{OM_1}$ 和 $\overrightarrow{OM_2}$，这两个复数之间有关系 $z_1=-z_2$，而这两个向量的特点是长度相等，方向相反.

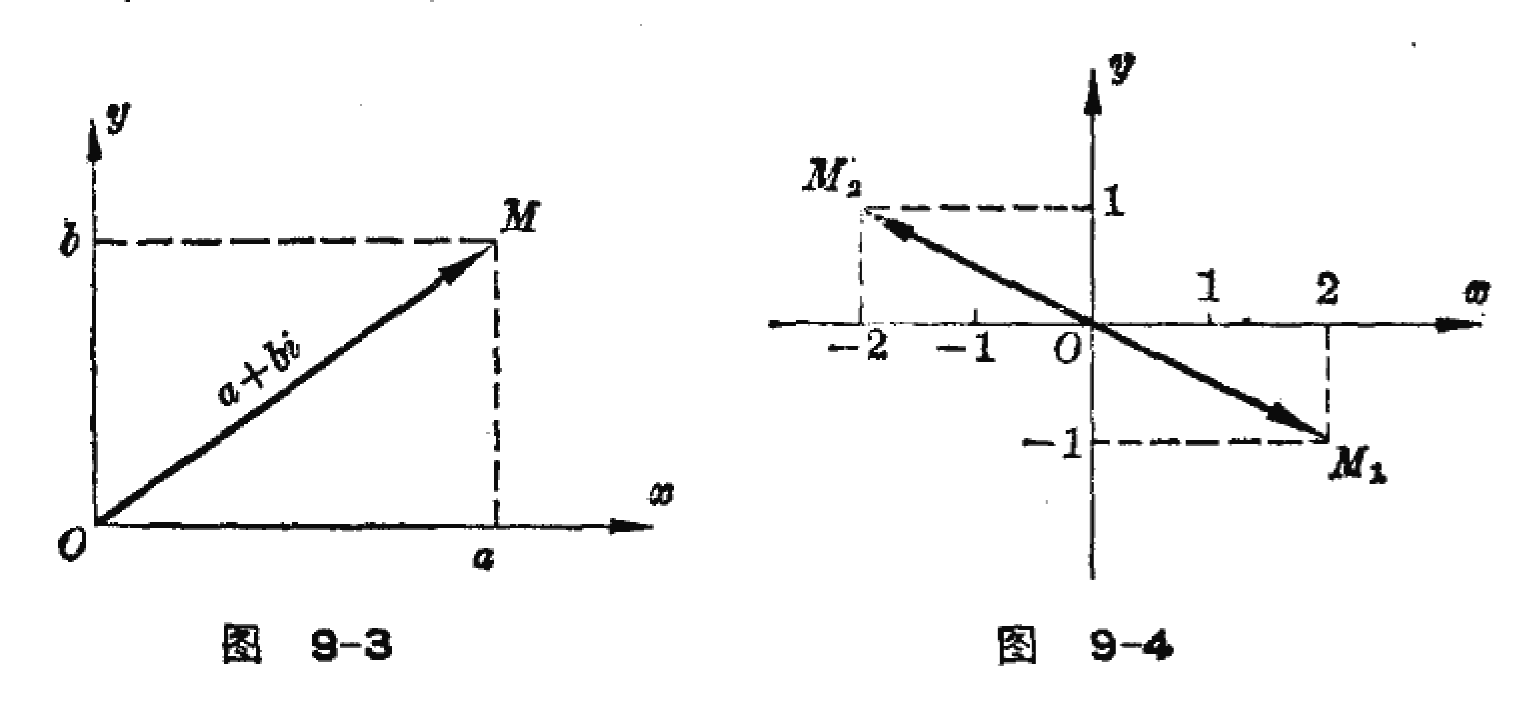


图 9-3　　　　图 9-4

二、复数的模与幅角

上面已经说过，复数

$$z=a+bi$$

对应于复平面上点 $M(a, b)$，也就对应一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的位置完全由 $\overrightarrow{OM}$ 的长度 r（非负）以及 x 轴转到 $\overrightarrow{OM}$ 的角 θ 所决定，把 r 称为复数 z 的模，θ 称为复数 z 的幅角. 容易知道，a、b 与 r、θ 之间有如下关系（图 9-5）：

$$r=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}.$$

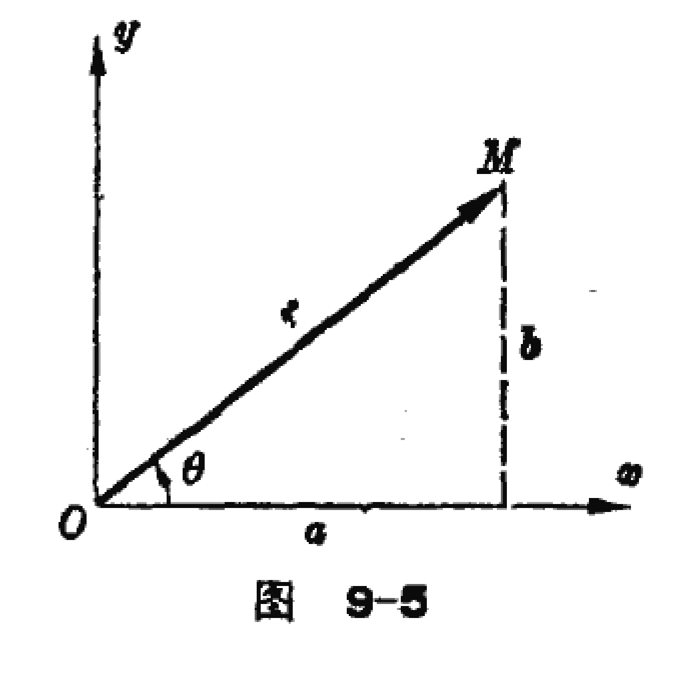


图 9-5

可以通过此式求出复数的模 r 和幅角 θ.

［例 1］ 求复数 $3+4i$ 的模和幅角.

解：运用刚才提到的计算式，得

$$r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}=1.3333.$$

由于复数 $3+4i$ 的幅角 θ 在第 I 象限 (图 9-6)，而反正切函数值表示的角度在第 I、第 IV 象限，所以

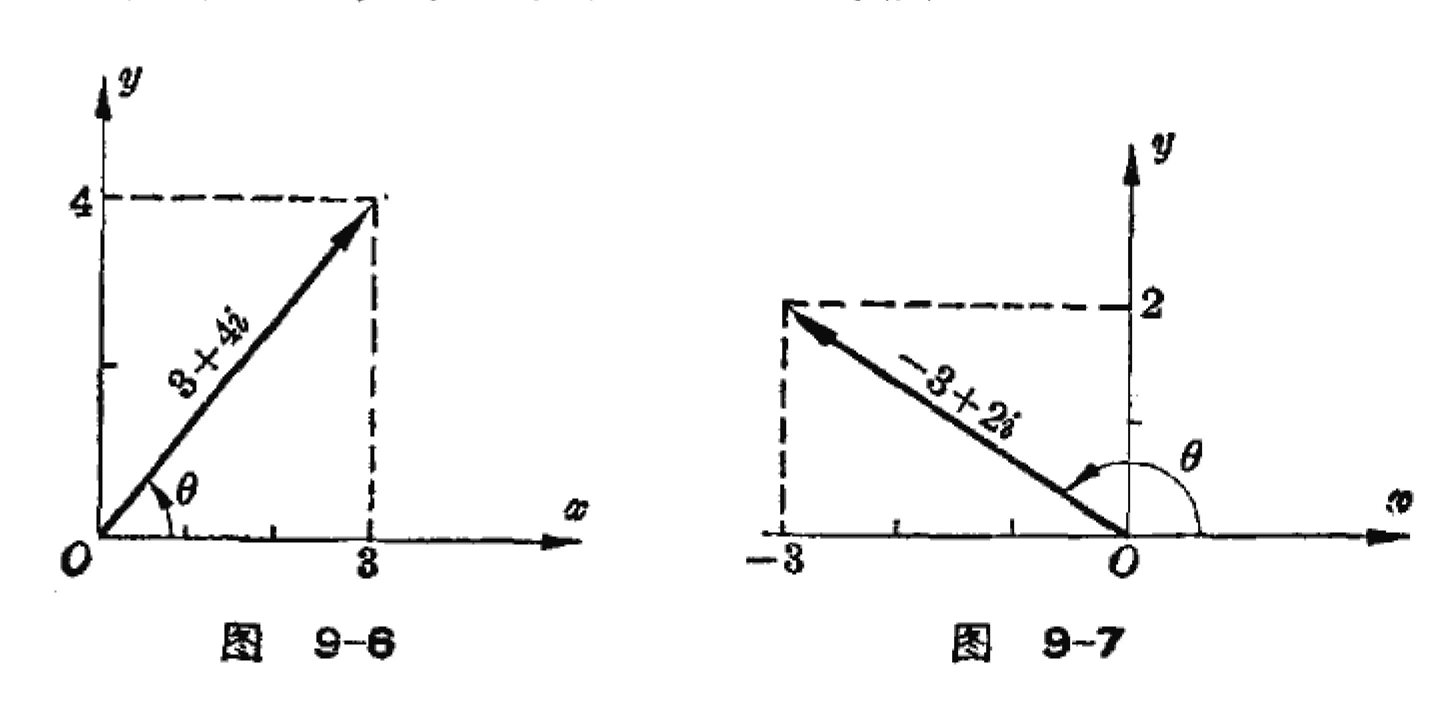


图 9-6　　　　图 9-7

$$\theta=\operatorname{arctg}1.3333=53°8'.$$

［例 2］ 求复数 $-3+2i$ 的幅角.

解：从图 9-7 知，复数 $-3+2i$ 的幅角 θ 在第 II 象限，且

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{-3}=-0.66667.$$

这时，

$$\operatorname{arctg}(-0.66667)=-\operatorname{arctg}0.66667=-33°41',$$

它是第 IV 象限的角，容易看出，只要再加上 π，就得到待求的第 II 象限角 θ，即

$$\theta=\operatorname{arctg}(-0.66667)+\pi=180°-33°41'=146°19'.$$

计算复数 $a+bi$ 的幅角 θ 的一般规则如下：当 θ 在第 I、第 IV 象限时，$\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$；而当 θ 在第 II、第 III 象限时，

$\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi.$

前面求复数的幅角过程中，我们给出了每一复数所对应的一个幅角，其实，幅角还可以取不同的值．例如，从图 9-6 中向量的位置可以看出，复数 $3+4i$ 的幅角可以是 $53°8'$，也可以是 $53°8'+k\times360°$（k 为整数）．一般，相等的复数的模一定相等，但幅角可以相差 2π 的整数倍．

下面，我们用模 r 和幅角 θ 来表示复数 z．

复数 $z=a+bi$ 对应于复平面上的点 $M(a,\ b)$（图 9-5），由正弦与余弦的定义，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$，所以

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta,$$

因此，

$$z=a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta,$$

即

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

这样，就得到复数 z 的另一种表示形式，叫做复数的三角形式．

下面举例说明复数的两种表示式之间的转换．

［例 3］　已知复数 z 的模是 2，幅角是 $\dfrac{5\pi}{9}$，求这个复数．

解：因 $r=2$，$\theta=\dfrac{5\pi}{9}$，所以复数 z 的三角形式为

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right),$$

即

$$\begin{aligned}z&=2(\cos100°+i\sin100°)=2(-\sin10°+i\cos10°)\\&=2(-0.17365+0.98481i)=-0.34730+1.96962i.\end{aligned}$$

［例 4］　求复数 i 与 $1-i$ 的三角形式．

解：复数 i 对应的向量是图 9-8 中的 $\overrightarrow{OM}_1$，其中 M_1 的坐标为(0, 1)。从图中可看出，这个复数的模为 1，幅角为 $\frac{\pi}{2}$，

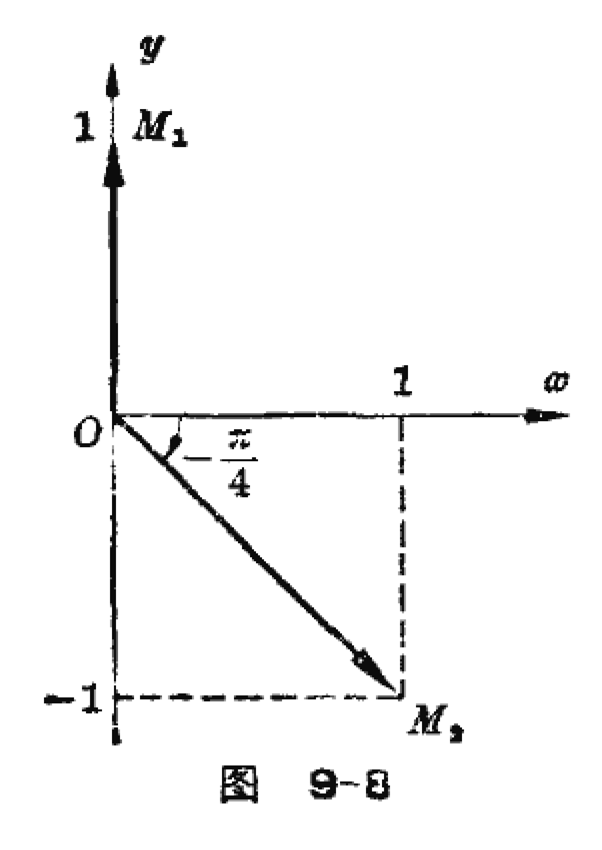


图 9-8

于是，复数 i 的三角形式为

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

同样，复数 $1-i$ 对应图 9-8 中的向量 $\overrightarrow{OM}_2$，由于 M_2 的坐标为(1, −1)，可看出这个复数的幅角为 $-\frac{\pi}{4}$，而模可求得为 $\sqrt{2}$，于是

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

有了复数的模 r 和幅角 θ，可以写出这个复数 z 的三角形式为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

引进记号

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

其中 θ 用弧度表示，这样，z 就可以写成比较简单的形式

$$z=re^{i\theta},$$

叫做复数的指数形式.

这里，$e^{i\theta}$ 是作为一个记号引进来的，它代表复数 $\cos\theta+i\sin\theta$，即 $e^{i\theta}$ 是模等于 1、幅角等于 θ 的复数．例如，

$$e^{i0}=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

都是模等于 1、幅角分别是 0、$\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 的复数.

现在,仅仅把指数形式看作三角形式的一种简写,例如

$$z=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ 表示 } z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ 表示 } z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

在复数的运算过程中，我们将进一步体会这种记法的意义及其优点.

前面,考虑到初学者学习的方便,我们暂时从纯粹的数学形式出发,引进了复数及其运算. 要进一步了解它的意义,还必须接触现实世界为复数研究提供的物理模型. 事实上,复数理论在电工学等科学部门中都有广泛的应用，在第三节中我们将举例说明复数的应用;同时，在数学中，在研究代数方程以及某些类型的积分方程与微分方程时，复数也是一个有效的工具. 恩格斯早就明确指出:“**-1 的平方根不仅是矛盾,而且甚至是荒谬的矛盾,是真正的背理。可是 $\sqrt{-1}$ 在许多情况下毕竟是正确的数学运算的必然结果;不仅如此,如果不准用 $\sqrt{-1}$ 来运算，那末数学，无论是初等数学或高等数学，将怎么办呢?**”[①]

小 结

1. 记号 i 表示 -1 的平方根,它是一个满足关系

$$i^2=-1$$

的数.

---

① 恩格斯:《反杜林论》,人民出版社 1970 年版,第 119 页.

复数的一般形式是

$$a+bi,$$

其中 a、b 为实数，依次称为复数的实部和虚部.

两个复数相等，必须而且只须它们的实部、虚部分别相等.

一个复数等于零，是指而且只是指它的实部和虚部都等于零.

2. 复数 $a+bi$ 对应复平面上的点 $M(a, b)$ 或向量 $\overrightarrow{OM}$.

对于复数 $a+bi$，向量 $\overrightarrow{OM}$ 之长是它的模，以 x 轴为始边、$\overrightarrow{OM}$ 为终边的角是它的幅角. 可通过关系式

$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a},$$

求复数 $a+bi$ 的模 r 和幅角 θ.

3. 复数 z 的三角形式与指数形式:

三角形式 $\qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

指数形式 $\qquad z=re^{i\theta}$,

其中 r、θ 依次为 z 的模与幅角，这里，记号 $e^{i\theta}$ 表示

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

习　　题

1. 写出下列复数的实部和虚部:

   $-\sqrt{2}$;　$1+3i$;　$\sqrt{5}-2i$;　$-5i$.

2. 在坐标平面上，画出下列复数所对应的向量:

   2;　$-2+i$;　$-3i$;　$-1-2i$;　0.

3. 已知复数的模 r 和幅角 θ，求复数:

   (1) $r=4,\ \theta=\frac{\pi}{3}$;　　(2) $r=2,\ \theta=\frac{8\pi}{5}$;

   (3) $r=3,\ \theta=-\frac{2\pi}{3}$;　　(4) $r=6,\ \theta=-\frac{5\pi}{3}$.

4. 求复数 $5, 1+i, 1+\sqrt{3}i, -2+3i$ 的三角形式。

5. 求下列复数的指数形式:

(1) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$;

(2) $5i$, $-1-i$, $1-\sqrt{3}i$, $-2-3i$.

6. 求复数 $e^{i\frac{\pi}{8}}$, $e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$, $5e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $5e^{i\frac{7\pi}{6}}$ 的实部与虚部。

7. 证明: $e^{i2k\pi}=1$, $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$ (k 为整数).

8. 用复数表示下列方程的根:

(1) $x^2+50=0$; (2) $2x^2+5x+4=0$;

(3) $4a^2x^2=b$ $(a>0, b<0)$;

(4) $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0, b^2-4ac<0)$.

9. 在坐标平面上画出对应于复数

$$z_1=3-2i \quad 和 \quad z_2=1+4i$$

的向量。

第二节 复数的运算

一、复数的四则运算

现在介绍复数的四则运算.

首先，两个复数相加、减，是它们的实部与实部相加、减，虚部与虚部相加、减. 例如

$$\begin{aligned}&(-1+3i)+(5-2i)\\&\quad=(-1+5)+(3i-2i)\\&\quad=(-1+5)+(3-2)i\\&\quad=4+i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2-i)-(-1+3i)\\&\quad=[2-(-1)]+(-i-3i)\\&\quad=[2-(-1)]+[(-1)-3]i\\&\quad=3-4i.\end{aligned}$$

复数的加减法规则为

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i.$$

其次，两个复数相乘，先按代数式乘法展开，再合并各展开项的实部和虚部. 例如

$$\begin{aligned}&(5-4i)(3+6i)\\&=15+30i-12i-24i^2\\&=15+30i-12i-24\times(-1)\\&=(15+24)+(30-12)i\\&=39+18i.\end{aligned}$$

复数的乘法规则为

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

可以验证，

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

我们称 $a+bi$ 与 $a-bi$ 互为共轭复数，这两个复数实部相等，虚部互为反号数. 上式表明，两共轭复数的乘积是一个正实数.

最后介绍复数的除法. 把除式写成分式形式，如果分母是实数，只要把分子上复数的实部和虚部分别除以这个实数，例如

$$\frac{-3+5i}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}i;$$

如果分母不是实数，由于两共轭复数乘积是一个实数，可先在分子分母上同乘分母的共轭复数，使分母变成实数后再运算，例如

$$\begin{aligned}\frac{-2+3i}{3+4i}&=\frac{(-2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{-6+8i+9i-12i^2}{3^2+4^2}\\&=\frac{6+17i}{25}=\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i.\end{aligned}$$

一般，若 $a_2+b_2i\neq 0$，由于

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2},$$

于是两复数相除的结果为

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

现在，我们来讨论复数加法的几何意义，从这里将看到，复数的运算法则不是凭空想象出来的，而是反映了现实世界的需要.

设复数

$$z_1=a_1+b_1i \quad 和 \quad z_2=a_2+b_2i$$

依次对应坐标平面上的两个向量 $\overrightarrow{OM}_1$ 和 $\overrightarrow{OM}_2$，而 $\overrightarrow{OM}$ 是由向量 $\overrightarrow{OM}_1$ 和 $\overrightarrow{OM}_2$ 按平行四边形法则合成得到的向量，即 OM 是以 OM_1、OM_2 为邻边的平行四边形的对角线(图 9-9). 我们来研究向量 $\overrightarrow{OM}$ 对应的复数.

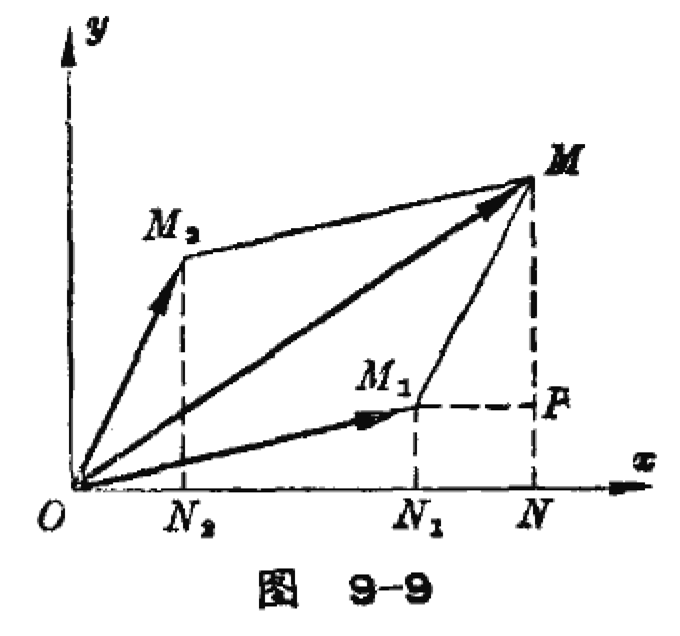


图 9-9

在图 9-9 中，我们作了一些辅助线，其中 M_1N_1、M_2N_2、MN 都垂直于 x 轴，$M_1P\perp MN$. 容易证明

$$MP=M_2N_2, \quad PN=M_1N_1, \quad N_1N=M_1P=ON_2,$$

于是

$$ON=ON_1+N_1N=ON_1+ON_2,$$

$$MN=PN+MP=M_1N_1+M_2N_2,$$

这两个式子表明，点 M 的横坐标(或纵坐标)等于点 M_1 与点 M_2 横坐标(或纵坐标)之和. 于是，从点 $M_1(a_1, b_1)$ 和

$M_2(a_2, b_2)$的坐标得到点 M 的坐标为 $M(a_1+a_2, b_1+b_2)$，即 $\overrightarrow{OM}$ 对应的复数为

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i=z_1+z_2.$$

由此可知，两复数的加法，可以表示为坐标平面上两个向量按平行四边形法则的合成．这就是复数加法的几何意义．

在自然科学的许多部门中，都会遇到按平行四边形法则进行的合成，如力、速度、加速度的合成；正弦交流电路中电流、电压、电势的合成，……．它们都是复数加法运算的实践基础．我们引入复数的概念及其运算，正是适应生产斗争和科学实验的需要．

二、复数的乘法公式和除法公式

设复数 z_1 的模为 r_1、幅角为 θ_1，复数 z_2 的模为 r_2、幅角为 θ_2，我们来计算复数乘积 $z_1 \cdot z_2$ 的模和幅角．

由于

$$z_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

所以

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\qquad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}$$

即 $z_1 \cdot z_2$ 的模为 r_1r_2、幅角为 $\theta_1+\theta_2$．于是得到

乘法公式 两复数乘积的模等于它们的模的乘积，而幅角等于它们的幅角之和．

用复数的指数形式表示上述结果，就是

$$(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

［例 1］ 写出下面两复数的乘积：

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ 与 $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

解： $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\cdot\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{6}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

下面，我们说明复数乘法的几何意义.

根据乘法公式，复数 z 与复数 $re^{i\theta}$ 的乘积 $z(re^{i\theta})$ 可以在复平面上表示出来.

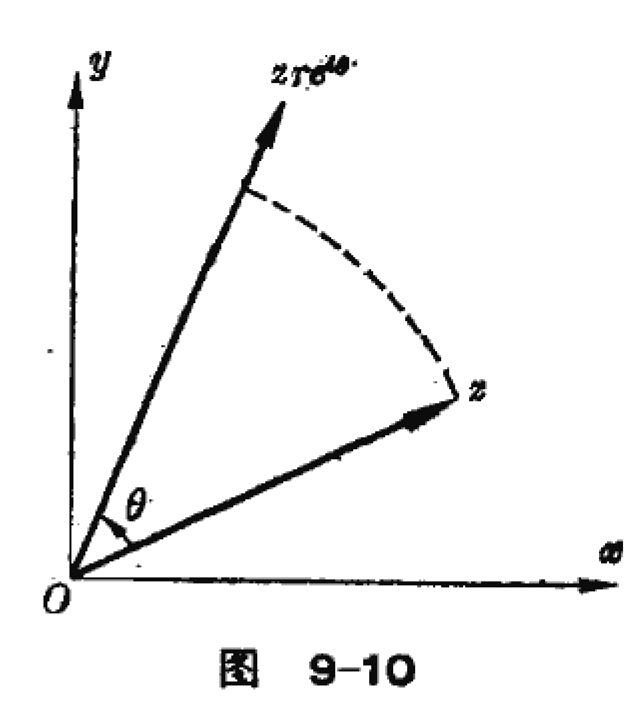


图 9-10

把复数 z 所对应的向量增加一个角度 θ，即绕坐标原点沿逆时针方向旋转一个角度 θ，再把得到的向量的模扩大到 r 倍，就得到对应于复数乘积 $z\cdot(re^{i\theta})$ 的向量(图 9-10)．这就是复数乘法的几何意义.

再讨论复数的除法.

若 $z_2\neq0$，由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1e^{i\theta_1}\cdot e^{i(-\theta_2)}}{r_2e^{i\theta_2}\cdot e^{i(-\theta_2)}}=\frac{r_1e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{r_2e^{i0}},$$

但

$$e^{i0}=\cos0+i\sin0=1,$$

所以

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

即两复数之商 $\frac{z_1}{z_2}$，其模为 $\frac{r_1}{r_2}$、幅角为 $\theta_1-\theta_2$. 用文字来叙述为

除法公式 两复数之商（除数不为零）的模等于它们模之商，而商的幅角等于被除数与除数幅角之差。

用指数形式表示除法公式，就是

$$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2\neq0).$$

[例 2] 已知两复数 z_1 和 z_2 的模依次为 4 和 2，幅角依次为 $\frac{4\pi}{3}$ 和 $\frac{5\pi}{6}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}=\frac{4}{2}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i.$

三、复数的乘方公式和开方公式

运用复数的乘法公式，若 $z=re^{i\theta}$，则

$$z^2=(re^{i\theta})(re^{i\theta})=r^2e^{i(\theta+\theta)}=r^2e^{i2\theta},$$

$$z^3=(r^2e^{i2\theta})(re^{i\theta})=r^3e^{i(2\theta+\theta)}=r^3e^{i3\theta},$$

一般，可得

$$z^n=r^ne^{in\theta},$$

即复数 z 的 n 次方 z^n，其模为 r^n、幅角为 $n\theta$. 用文字叙述为

乘方公式 一复数 n 次方的模等于这个复数模的 n 次方，而幅角等于这个复数幅角的 n 倍.

用指数形式表示为

$$(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}.$$

[例 3] 计算 $(1+\sqrt{3}i)^{10}$.

解：因为

$$1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

根据乘方公式，

$$(1+\sqrt{3}i)^{10}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{10}=2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}}$$
$$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$
$$=2^{10}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-512-512\sqrt{3}i.$$

如果我们仿照实数中的提法，把 $e^{i\theta}$ 称为以 e 为底、$i\theta$ 为指数的幂，那末从乘法、除法以及乘方的运算看出，这种幂的运算规则与实数幂的运算规则相仿．例如幂的乘法可转化为指数的加法．可见，用指数形式表示复数后，复数的乘、除、乘方运算，只要注意其中的 $e^{i\theta}$ 按实数中幂的运算规则进行运算就能求得结果．从这里，我们已初步体会到采用指数形式记号 $e^{i\theta}$ 的好处．在高等数学中，还将通过对一般复指数幂的讨论，进一步说明 $e^{i\theta}$ 的意义，并说明其中的 e 就是第四章中遇到过的 $e=2.71828\cdots$．

最后讨论复数的开方公式．

对于复数 z，我们把满足关系

$$u^n=z$$

的复数 u 称为 z 的 n 次方根，记为

$$u=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}.$$

求一个复数的 n 次方根，就称为开方．

在实数运算中，根式表示算术根．例如，由于 2 和 -2 的平方都等于 4，它们都是 4 的平方根，但 $\sqrt{4}$ 只用来表示正的平方根，即 $\sqrt{4}=2$．而复数运算中的 n 次根式，却表示所有的 n 次方根．例如，方程 $u^2=-4$ 的复数根为 $u=\pm 2i$，根式 $\sqrt{-4}$ 就表示所有的 -4 的平方根，即 $\sqrt{-4}=2i,\ -2i$．也就是说，在实数范围内，根式只取一个正值；但在复数范围

内，根式要取几个值.

设复数 z 的模和幅角依次为 r 和 θ，我们来决定 z 的 n 次方根 u 的模 ρ 和幅角 φ.

由于 $u^n=z$，待定的 ρ 和 φ 应满足关系

$$(\rho e^{i\varphi})^n=re^{i\theta}.$$

左边运用乘方公式，得

$$\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}.$$

要使上式中左右两复数相等，这两个复数的模必相等、且幅角只相差 2π 的整倍数. 于是 ρ、φ 应选择为

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad (k\text{ 为任意整数}),$$

即

$$\rho=\sqrt[n]{r}\,(\text{算术根}),\qquad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad (k\text{ 为任意整数}).$$

于是，z 的 n 次方根可写为

$$u=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k\text{ 为任意整数}).$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，u 取 n 个不同的值

$$\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}},\ \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\ \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}},\ \cdots,\ \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}.$$

当 k 取其它值时，所得 u 的值必与上面 n 个值中某一个相等. 例如，当 $k=n$ 时，

$$u=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2n\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\cdot e^{i2\pi},$$

但 $e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$，所以

$$u=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}},$$

即 $k=n$ 与 $k=0$ 同时对应一个复数.

于是，$z=re^{i\theta}$ 的 n 次方根只有 n 个根，可写为

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}}=(re^{i\theta})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

我们把它用文字叙述如下：

开方公式 复数的n次方根有n个值，模都等于这个复数模的n次算术根，而幅角分别等于这个复数幅角与2π的$0, 1, \cdots, n-1$倍的和的n分之一。

[例 4] 计算$\sqrt[3]{1-i}$.

解：因为

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

所以，运用开方公式得

$$\sqrt[3]{1-i}=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}}\quad(k=0, 1, 2).$$

于是，$\sqrt[3]{1-i}$对应的三个值为

$$\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\quad(\text{对应于 } k=0);$$

$$\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\quad(\text{对应于 } k=1);$$

$$\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{23\pi}{12}}\quad(\text{对应于 } k=2).$$

下面，举例说明复数开方在解代数方程中的运用。

[例 5] 解方程$x^5-1=0$.

解：在实数范围内，这个方程只有一个根“1”，而在复数范围内，1的五次方根有5个。

把x看作复数，它满足方程

$$x^5-1=0,$$

于是

$$x=\sqrt[5]{1},$$

这里，$\sqrt[5]{1}$是看作复数1的五次方根。

运用开方公式，

$$x=\sqrt[5]{1}=(e^{i0})^{\frac{1}{5}}=e^{i\frac{2k\pi}{5}}\quad(k=0, 1, 2, 3, 4),$$

于是，$x^5-1=0$的五个根为

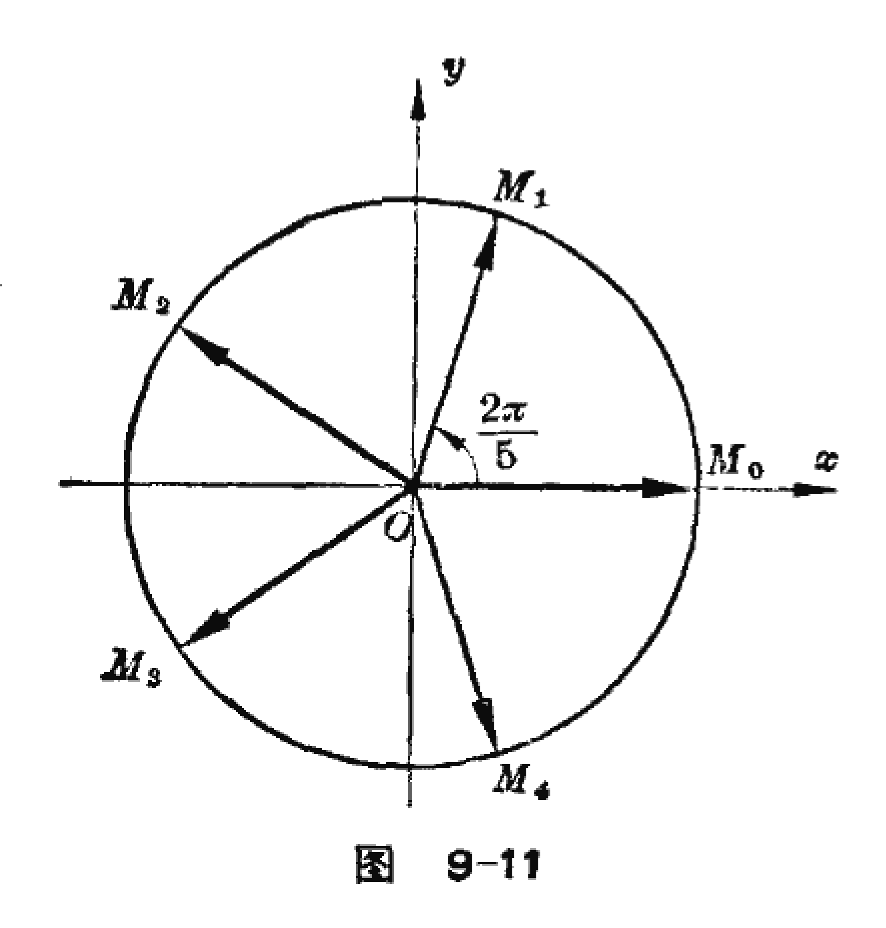


图 9-11

$$e^{i0}(=1),\quad e^{i\frac{2\pi}{5}},\quad e^{i\frac{4\pi}{5}},\quad e^{i\frac{6\pi}{5}},\quad e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

在复平面上，这五个根可表示为单位圆上的五个等分点(图 9-11)。

这里，$x^5-1=0$ 在复数范围内有五个根，这些根或者是实数(即 e^{i0})，或者以共轭复数形式出现(如 M_1 与 M_4，M_2 与 M_3 分别为共轭复数)。一般，对于系数为实数的一元 n 次方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0\quad(a_n\neq0),$$

在复数范围内都存在 n 个根(包括重根)，而且复数根以共轭形式出现。

小　　结

1．复数的四则运算规则是

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i,$$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i\quad(a_2+b_2i\neq0).$$

2．乘法公式：

$$(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

除法公式：

$$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq0).$$

3．乘方公式：

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta},$$

开方公式:

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k=0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

4. 复数的加法可以表示坐标平面上两个向量按平行四边形法则的合成；复数的乘法可以表示坐标平面上向量的旋转和伸缩。

习　题

1. 求下列复数的共轭复数:

$\frac{1+i}{3}$;　$5\left(\frac{1}{2}-i\right)$;　$(i+1)^2$;　$i(i+1)$;　$\frac{i+1}{2i}$.

2. 一对共轭复数所对应的向量，其相互位置有什么特征?

3. 计算下列复数:

(1) $3(i-1)+4(1-i)-\frac{1}{2}(2i+4)$;

(2) $\frac{(i-1)(i+1)}{5}-\frac{(i+1)^2}{3}$;

(3) $(1-2i)(4i+5)$;　(4) $(1-3i)(2+i)(5-i)$;

(5) $\frac{1}{2-3i}+\frac{1}{2+3i}$;　(6) $\frac{3+4i}{5-2i}$;

(7) $i(i+1)+\frac{1}{(2-3i)^2}$;　(8) $i^3-1+\frac{i}{2i+1}$;

(9) $i+\frac{1}{i+\frac{4}{i}}$;　(10) $\frac{i-2}{1+i+\frac{i}{i-1}}$.

4. i 的正整数幂中，哪些是彼此相等的，试总结 i^n(n 为正整数)的一般规则.

5. 把下列乘积用指数形式表示:

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right)$.

6. 把下列复数的商用指数形式表示:

(1) $\frac{\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)}$; (2) $\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$;

(3) $\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$; (4) $\frac{-i}{2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)}$.

7. 计算下列复数:

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^6$; (2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12}$.

8. 把下列复数用指数形式表示:

(1) $\sqrt[4]{16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$; (2) $\sqrt[8]{-2-2\sqrt{3}i}$.

9. 求下列方程的根:

(1) $x^3+27=0$; (2) $x^6-1=0$;

(3) $x^4+x^2+1=0$.

第三节　复数在电工学中的应用

一、正弦波的迭加

正弦交流电路是最常见的交流电路,在这个电路中,电流的方向和大小随着时间作周期性的变化,而且电流 i 是时间

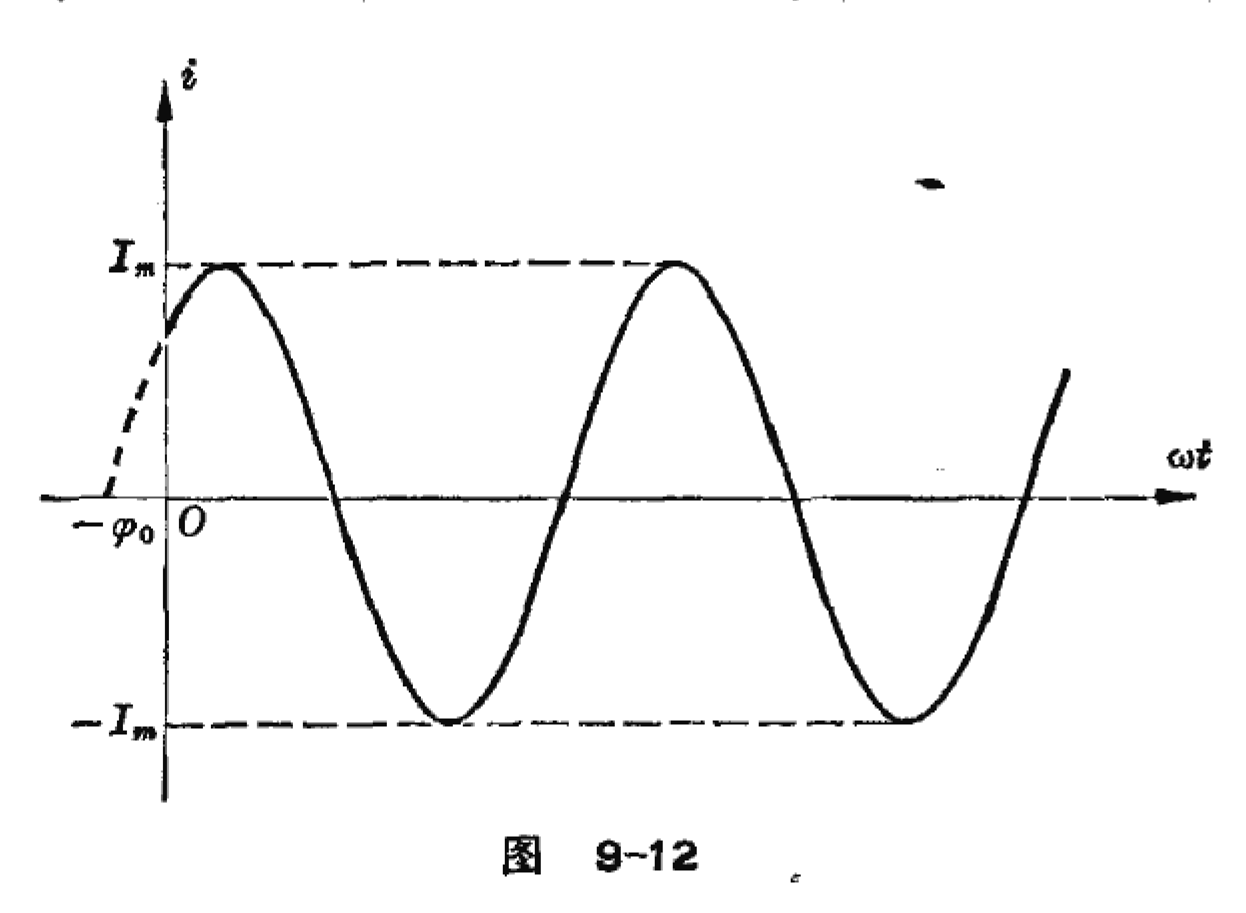


图 9-12

t 的正弦函数

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

我们把这个函数的图形称为电流的波形图. 从图 9-12 中可以看出, I_m 是电流能够达到的最大值,我们称 I_m 为电流最大值或幅值,它决定了波形的振动幅度.从图 9-12 中还可看出,波形的起始位置与 φ_0 有关,我们把 φ_0 称为电流的初相. 并且,把 ω 称为电流的角频率.

在正弦交流电路中,常常遇到正弦波的迭加问题. 例如,在图 9-13 所示的电路中,若已知通过负载的两个分电流 i_1 和 i_2, 则求总电流 i 就是一个波的迭加问题. 不仅如此, 由于电压、电势等在交流电路中也是时间参数的正弦函数, 因此常常出现正弦波的迭加问题.

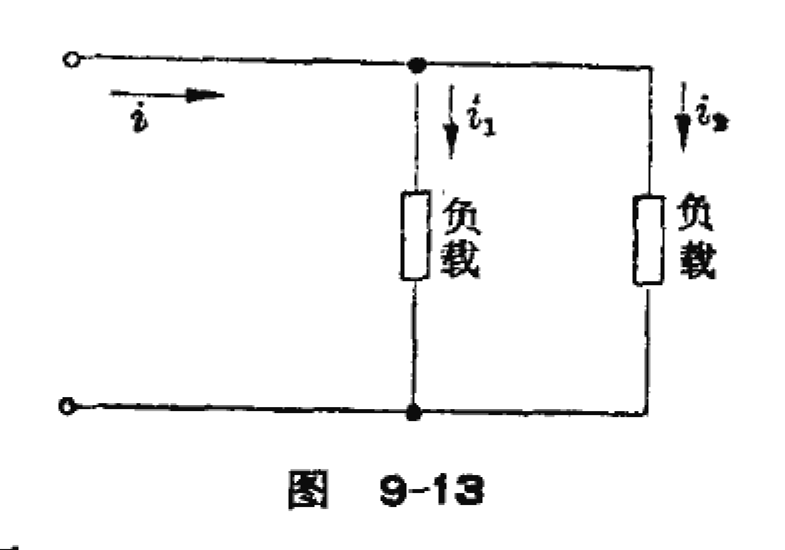


图 9-13

下面, 我们用复数方法来讨论波形迭加问题. 物理上习惯用 i 表示电流强度, 为了避免记号上的混乱, 我们以记号 j 表示 -1 的平方根.

问题 已知分电流

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad i_2 = I_2 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

求总电流 $i_1 + i_2$.

分析 一方面,由于 i_1 与 i_2 分别是复数

$$I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = I_1[\cos(\omega t + \varphi_1) + j\sin(\omega t + \varphi_1)]$$

和

$$I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = I_2[\cos(\omega t + \varphi_2) + j\sin(\omega t + \varphi_2)]$$

的虚部,因此 $i_1 + i_2$ 是复数

$$I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + I_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

的虚部.

另一方面,由于

$$I_1e^{j(\omega t+\varphi_1)}+I_2e^{j(\omega t+\varphi_2)}=e^{j\omega t}(I_1e^{j\varphi_1}+I_2e^{j\varphi_2}),$$

于是,若能求得 $I_1e^{j\varphi_1}+I_2e^{j\varphi_2}$ 的模 I 与幅角 φ,即 $I_1e^{j\varphi_1}+I_2e^{j\varphi_2}=Ie^{j\varphi}$,就可以写出

$$\begin{aligned}I_1e^{j(\omega t+\varphi_1)}+I_2e^{j(\omega t+\varphi_2)}&=e^{j\omega t}(I_1e^{j\varphi_1}+I_2e^{j\varphi_2})\\&=e^{j\omega t}\cdot Ie^{j\varphi}=Ie^{j(\omega t+\varphi)}\end{aligned}$$

的虚部为 $I\sin(\omega t+\varphi)$.

综合两方面,即得

$$i_1+i_2=I\sin(\omega t+\varphi).$$

结论 根据以上分析,解题可分以下三步(图 9-14):

(1) 作出与电流对应的复数(记为 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$)

$$\dot{I}_1=I_1e^{j\varphi_1}$$

(对应于 $i_1=I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$),

$$\dot{I}_2=I_2e^{j\varphi_2}$$

(对应于 $i_2=I_2\sin(\omega t+\varphi_2)$);

(2) 计算出 $\dot{I}_1+\dot{I}_2$ 的模和幅角,依次记为 I 和 φ;

(3) 写出答案

$$i_1+i_2=I\sin(\omega t+\varphi).$$

从这里可以看出,角频率相同的两个正弦波,迭加后角频率仍然相同. 而且,它们的幅值和初相之间的关系,可以用图 9-14 中的平行四边形来表示.

[例 1] 已知

$$i_1=40\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$i_2=60\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right),$$

求 i_1+i_2.

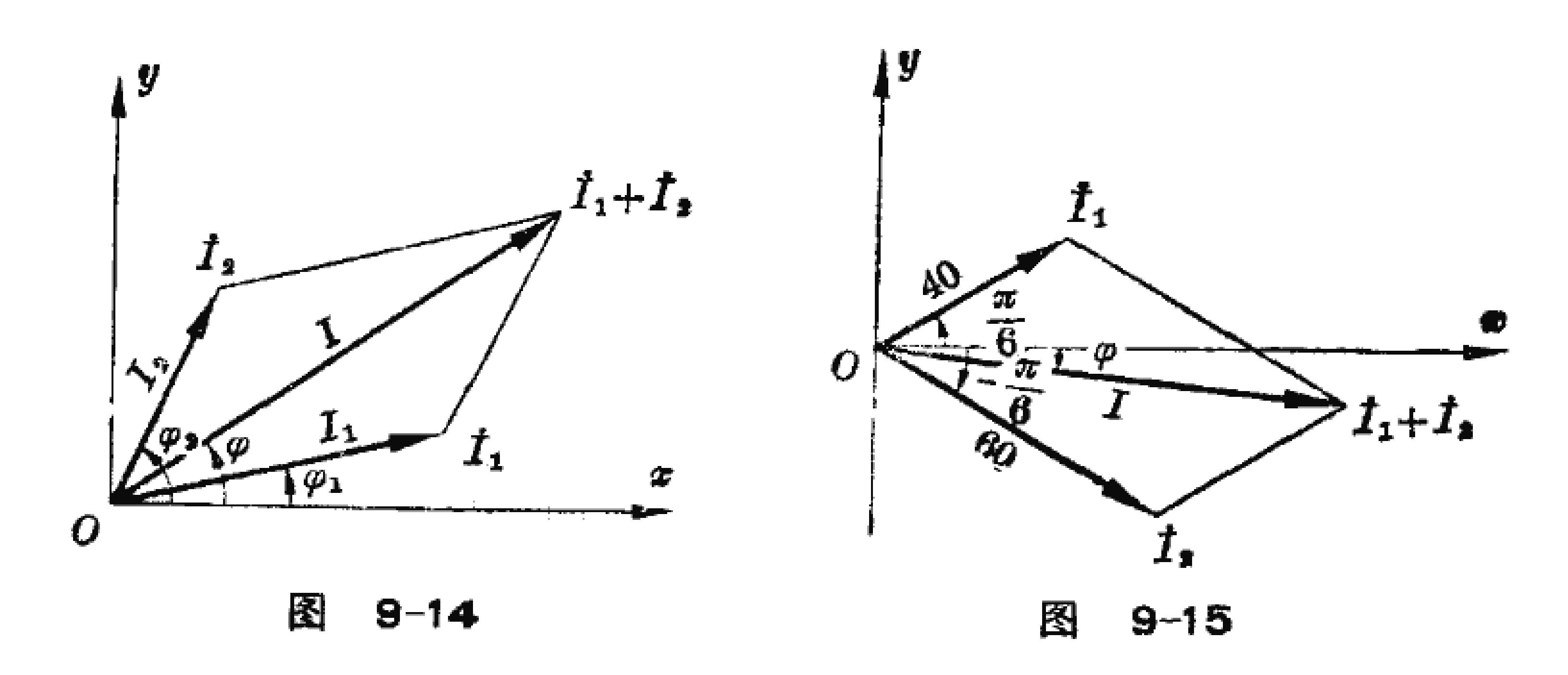


图 9-14　　　　图 9-15

解：根据以上讨论，先分别作出对应于电流 i_1 和 i_2 的复数

$$\dot{I}_1=40e^{j\frac{\pi}{6}},\quad \dot{I}_2=60e^{j\left(-\frac{\pi}{6}\right)},$$

再求 $\dot{I}_1+\dot{I}_2$ 的模 I 和幅角 φ(图 9-15). 因为

$$\begin{aligned}\dot{I}_1+\dot{I}_2&=40e^{j\frac{\pi}{6}}+60e^{j\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\\&=40\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)+60\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\&=40\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)+60\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)\\&=50\sqrt{3}-10j,\end{aligned}$$

所以

$$I=\sqrt{(50\sqrt{3})^2+(-10)^2}=\sqrt{7600}=87.18,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{10}{50\sqrt{3}}=-\frac{1}{8.6603},$$

即

$$\varphi=\operatorname{arc\,ctg}(-8.6603)=-6°35',$$

于是可写出

$$i_1+i_2=87.18\sin(\omega t-6°35').$$

二、电流定律的复数形式

我们用复数来表示正弦交流电路中电流、电压与阻抗之间的关系.

在正弦交流电路中，电流 i 和电压 u 与时间 t 的关系可分别写为以下形式:

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_1)=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\varphi_1),$$

$$u=U_m\sin(\omega t+\varphi_2)=\sqrt{2}\,U\sin(\omega t+\varphi_2),$$

其中，I_m 与 U_m 依次称为电流与电压的最大值或幅值，而

$$I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\quad 与 \quad U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

依次称为电流与电压的有效值，它们分别是电流与电压在某种意义下的平均值. 例如，照明用的电源电压为 220 伏，这个电压就是指电压的有效值.

在正弦交流电路中，影响电流的参数不仅有电阻，还有电感与电容. 为了确定电路中电流与电压之间的关系，我们先分析纯电阻、纯电感和纯电容电路，从中总结规律，再运用到一般的电路中去.

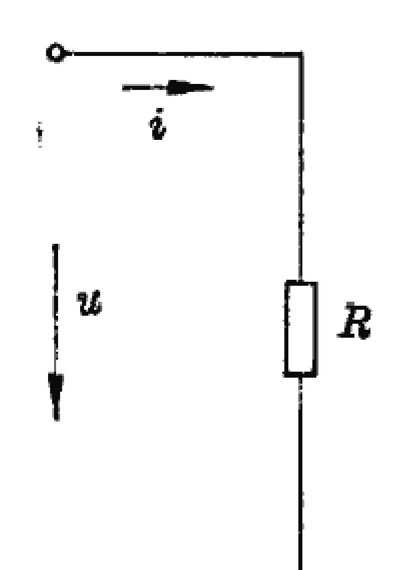


图 9-16

在图 9-16 所示的纯电阻电路中，设

$$i=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\varphi).$$

根据电流定律，

$$u=iR=\sqrt{2}\,IR\sin(\omega t+\varphi),$$

即电压 u 的有效值为

$$U=IR,$$

而初相与 i 的初相一致.

为了表达电流、电压的有效值及初相之间的关系，自然地引进复数这个工具. 为此，分别写出与

$$i=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\varphi_1) \quad 和 \quad u=\sqrt{2}\,U\sin(\omega t+\varphi_2)$$

相对应的复数

$$\dot{I}=Ie^{j\varphi_1} \quad 和 \quad \dot{U}=Ue^{j\varphi_2}.$$

运用这个记号，纯电阻电路中电压与电流的关系可用复数表示为

$$\dot{U}=\dot{I}R \quad 或 \quad \dot{I}=\frac{\dot{U}}{R}.$$

再考虑由线圈与电源连接的纯电感电路(图 9-17)．设线圈的自感为 L,运用实验或高等数学方法,可以推知,当电流为

$$i=\sqrt{2}\,I\sin(\omega t+\varphi)$$

时,电压为

$$u=\sqrt{2}\,I\omega L\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

即 u 的有效值为

$$U=I\omega L,$$

但初相比电流初相增加了$\frac{\pi}{2}$.

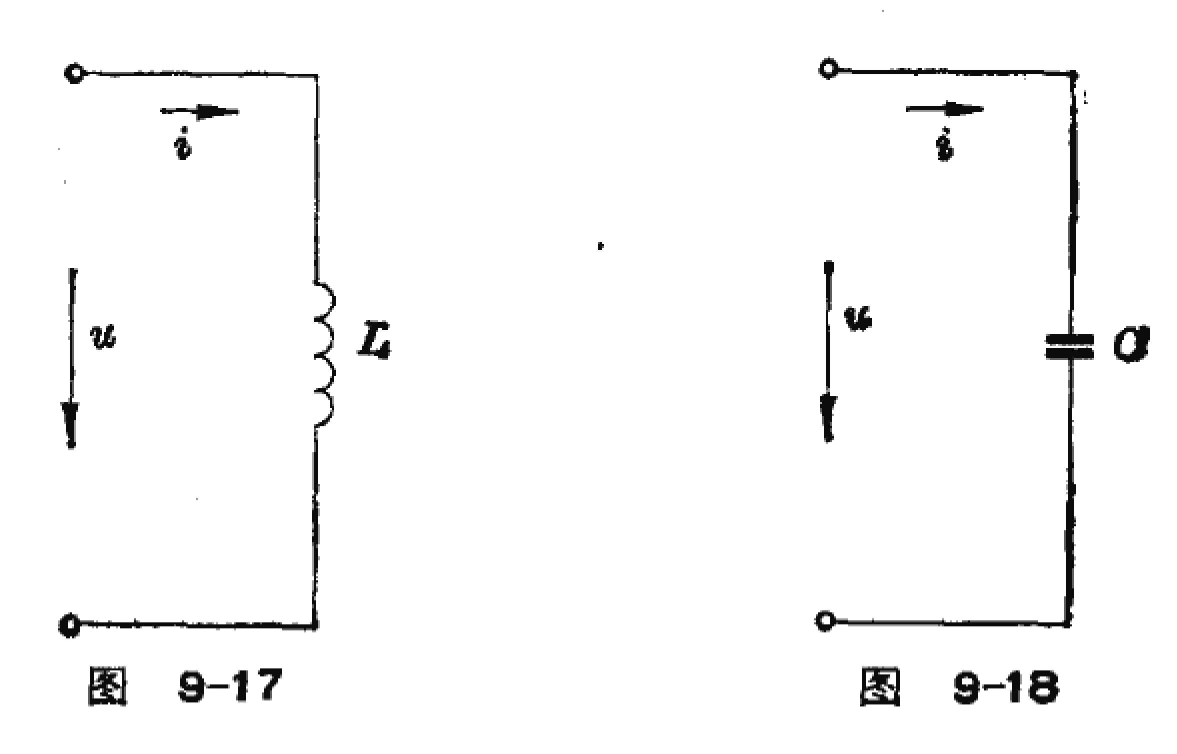


图 9-17 图 9-18

反映到向量上来,如果记 $\dot{I}=Ie^{j\varphi}$, 那末

$$\dot{U}=I\omega Le^{j\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=I\omega Le^{j\varphi}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}},$$

由于 $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$, 所以

$$\dot{U}=(j\omega L)Ie^{j\varphi}=(j\omega L)\dot{I},$$

于是，纯电感电路中电压和电流关系的复数形式为

$$\dot{U}=\dot{I}(j\omega L) \quad 或 \quad \dot{I}=\frac{\dot{U}}{j\omega L}.$$

同样的讨论，得到纯电容电路(图 9-18)中电压与电流关系的复数形式为

$$\dot{U}=\dot{I}\left(\frac{-j}{\omega C}\right) \quad 或 \quad \dot{I}=\frac{\dot{U}}{\frac{-j}{\omega C}}.$$

一般，我们可以把交流电路中的复数阻抗记为 Z，那末，正弦交流电路中的电流定律可以简单地表示为

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z},$$

其中，复数阻抗

$$Z=\begin{cases} R, & 电阻\ R, \\ j\omega L, & 电感\ L, \\ \frac{-j}{\omega C}, & 电容\ C. \end{cases}$$

在电工学中，从电路的一些规律，说明串联电路中的总的复数阻抗等于各支路复数阻抗之和，而并联电路中的总的复数阻抗的倒数等于各支路复数阻抗倒数之和.

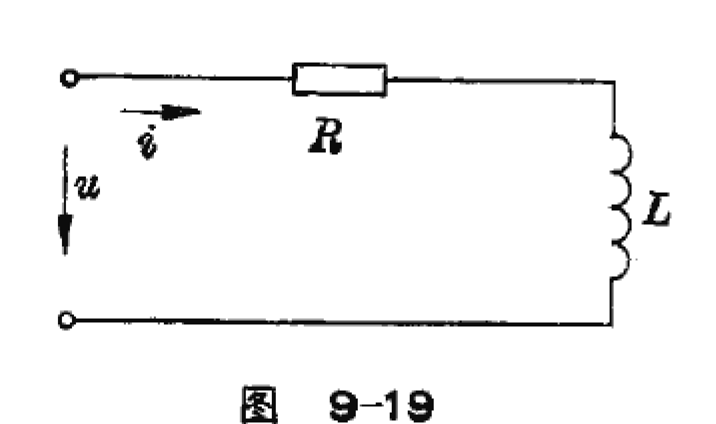


图 9-19

[例 2] 在图 9-19 的串联电路中，设

$$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi),$$

求电流 i.

解：电阻 R 与电感 L 分别对应复数阻抗 R 和 $j\omega L$，于是，总的复数阻抗为

$$Z=R+j\omega L.$$

根据电流定律的复数形式，得

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{Ue^{j\varphi}}{R+j\omega L}=\frac{Ue^{j\varphi}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}e^{j\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}}}$$

$$=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\ e^{j\left(\varphi-\mathrm{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}\right)},$$

它所对应的电流为

$$i=\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t+\varphi-\mathrm{arctg}\ \frac{\omega L}{R}\right).$$

[例3]　在图9-20的并联电路中，设

$$u=\sqrt{2}U\sin\omega t,$$

求电流 i.

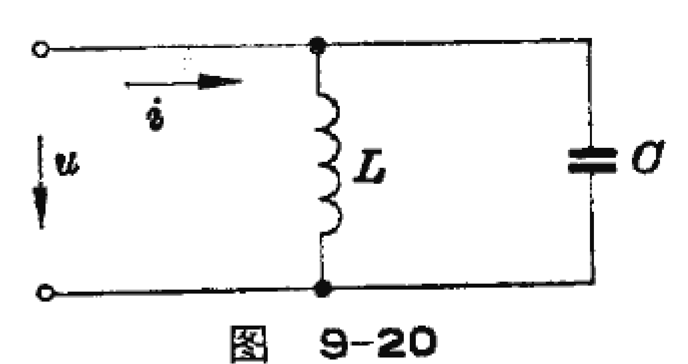


图　9-20

解：电感与电容分别对应的复数阻抗为 $j\omega L$ 与 $\frac{-j}{\omega C}$，于是，总的复数阻抗 Z 的倒数为

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{\frac{-j}{\omega C}}=\frac{-j}{\omega L}+j\omega C=j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right).$$

根据电流定律，

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\dot{U}\cdot\frac{1}{Z}=Ue^{j0}\cdot j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)=jU\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right).$$

当 $\omega C-\frac{1}{\omega L}>0$ 时，从 $\dot{I}=U\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)e^{j\frac{\pi}{2}}$，得

$$i=\sqrt{2}U\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right);$$

当 $\omega C-\frac{1}{\omega L}=0$ 时，从 $\dot{I}=0$，得

$$i=0;$$

当 $\omega C-\frac{1}{\omega L}<0$ 时，从 $\dot{I}=U\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$，得

$$i=\sqrt{2}U\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right).$$

小　　结

1．若求得 $I_1e^{j\varphi_1}+I_2e^{j\varphi_2}$ 的模 I 和幅角 φ，则

$$I_1\sin(\omega t+\varphi_1)+I_2\sin(\omega t+\varphi_2)=I\sin(\omega t+\varphi).$$

2．正弦交流电路中电流定律的复数形式为

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z},$$

其中，$\dot{I}=Ie^{j\varphi_1}$ 是与电流 $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_1)$ 对应的复数；$\dot{U}=Ue^{j\varphi_2}$ 是与电压 $u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi_2)$ 对应的复数；而 Z 是复数阻抗：

$$Z=\begin{cases}R, & \text{电阻 } R,\\ j\omega L, & \text{电感 } L,\\ \dfrac{-j}{\omega C}, & \text{电容 } C,\end{cases}$$

并且，串联电路中总复数阻抗等于各支路复数阻抗之和，并联电路中总复数阻抗的倒数，等于各支路复数阻抗的倒数之和.

习　　题

1．设

$$i_1=10\sin(314t+30°),\quad i_2=20\sin(314t+45°),$$

求 i_1+i_2 的幅值与初相.

2．设

$$u_1=20\sin(314t+100°),\quad u_2=10\sin(314t+200°),$$

求 u_1+u_2 的幅值.

3．在纯电容电路中（参看图 10-19），设电压

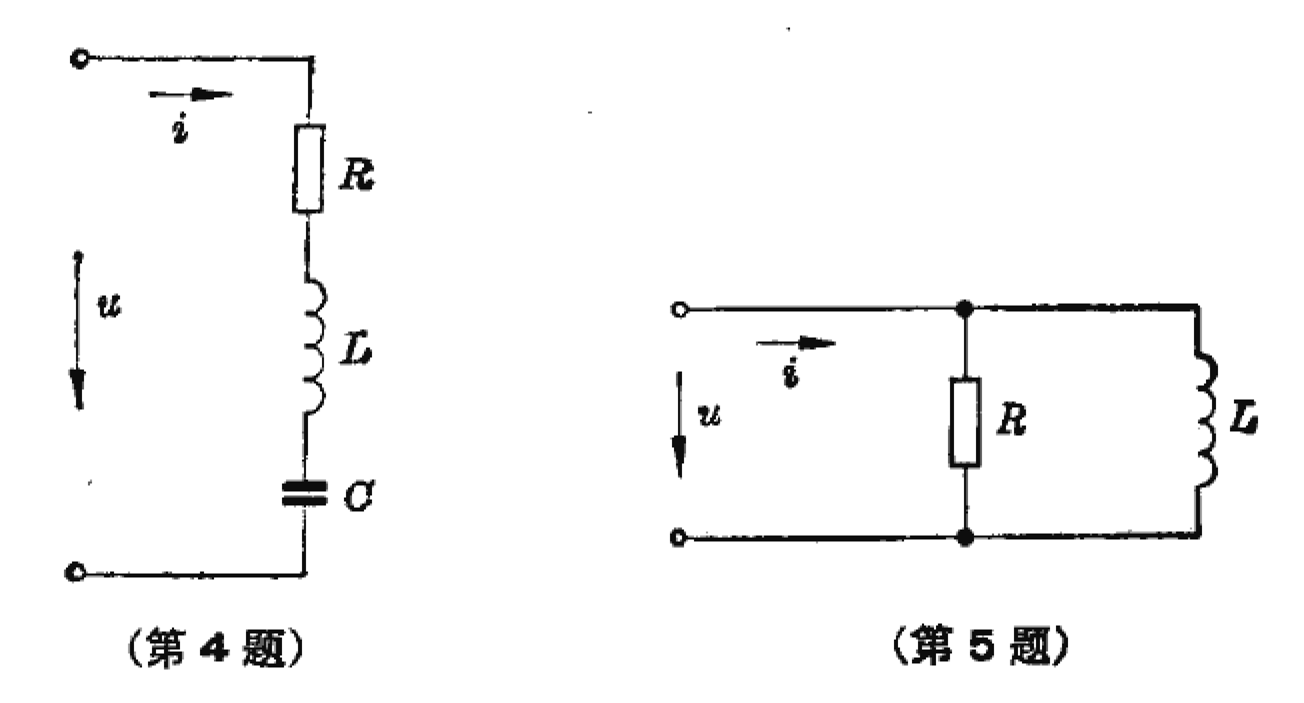
$$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi),$$

试运用电流的复数形式求电流 i.

4. 在电阻、电容、电感的串联电路中,设

$$u=\sqrt{2}\,U\sin\omega t,$$

试求电流 i.



(第 4 题)　　　　(第 5 题)

5. 在图中所示电阻、电感的并联电路中,设

$$u=\sqrt{2}\,U\sin(\omega t+\varphi),$$

试求电流 i.

复　习　题

1. 什么叫做复数的指数形式?

2. 写出下列复数的共轭复数:

$i(3i+1)^2$; $\quad \dfrac{(i+3)^2}{1+5i}$; $\quad 3e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

3. 用指数形式表示下列复数的共轭复数:

$5\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$; $\quad \sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$; $\quad 3e^{i\frac{\pi}{5}}$; $\quad 3e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

4. 求下列复数的模与幅角:

(1) $-6i$, $\quad 3+5i$, $\quad -3+5i$;

(2) $15\left(\cos\dfrac{3\pi}{10}+i\sin\dfrac{3\pi}{10}\right)$, $\quad e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $\quad -e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

5. 设 $\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数,证明:

(1) $\bar{z}$ 与 z 的模相等; 　　(2) $\bar{z}\cdot z$ 等于 z^2 的模.

6. 说明复数加法和减法的几何意义.

7. 说明复数乘法和除法的几何意义.

8. 计算下列值:

(1) $e^{i2k\pi}$ (k 为任何整数); (2) $i^{-(4k+1)}$ (k 为任何整数);

(3) $(1+i)^n$ (n 为正整数); (4) $(1+\sqrt{3}i)^{-n}$ (n 为正整数);

(5) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数);

(6) $(\sqrt{3}-i)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ (n 为正整数);

(7) $\dfrac{(-\sqrt{3}-i)^n}{(1+i)e^{i\pi}}$ (n 为正整数);

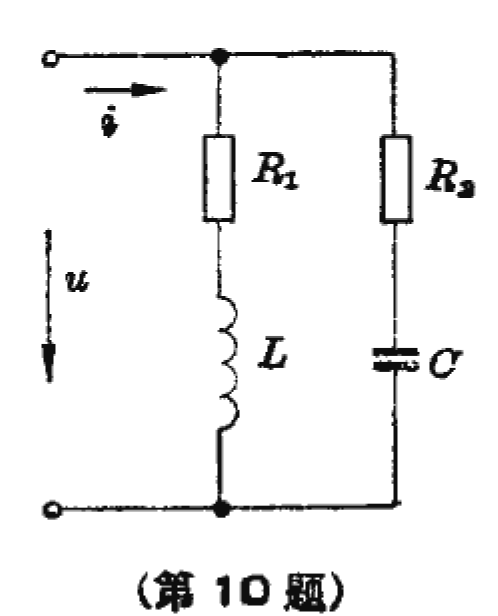
(8) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}$ (n 为正整数).

9. (1) 若复数 z_1 的模是 10, 幅角是 30°; z_2 的模是 20,幅角是 45°, 求 z_1-z_2 的模与幅角;

(2) 若 $i_1=10\sin(314t+30°)$,
$i_2=20\sin(314t+45°)$,
求 i_1-i_2.

10. 若图中所示电路的电压为
$u=220\sqrt{2}\sin 314t$,

$R_1=3$, $R_2=8$, $L=\dfrac{4}{314}$,
$C=\dfrac{1}{6\times 314}$, 求电流 i.



(第 10 题)

附录　习题答案

第一章

第一节

1. (1) 1562, 71.45, 0.99, 0.005;
   (2) 750, 1, 2470, 0.25.
2. (1) 8882 米, −154 米;
   (2) 12°C, −2°C;
   (3) 2000 转/分, −1500 转/分;
   (4) 5 厘米, −3 厘米;
   (5) −5 小时, 2 小时;　　(6) 500 斤, −200 斤.
3.

	−2	3	6	−18	0	−0.5	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{5}$
绝对值	2	3	6	18	0	0.5	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
符　号	−	+	+	−		−	+	−

4. 按从小到大的顺序排列如下:
   (1) 3, 4;　−4, −3;　−4, 3;　−3, 4.
   (2) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$;　$-\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$;　$-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$.
   (3) 1.4, $\frac{3}{2}$;　$-\frac{6}{11}$, 0.5;　0.3, $\frac{1}{3}$;　$-\frac{1}{3}$, −0.3.
5. (1) $\frac{3}{10}$;　(2) $\frac{4}{5}$ 公斤;　(3) 2 寸$=\frac{1}{5}$尺;
   (4) 40 分$=\frac{2}{3}$ 小时.
6. $\frac{3}{4}$;　$\frac{4}{7}$;　$\frac{28}{71}$;　$\frac{8}{3}$;　$\frac{1}{3}$.

7. 80%; 28%; 90%; 12.5%; 125%; 1250%.

8. (1) $\frac{9}{12}$, $\frac{4}{12}$; (2) $\frac{42}{105}$, $\frac{4}{105}$;

(3) $\frac{35}{105}$, $\frac{42}{105}$, $\frac{45}{105}$; (4) $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$.

9. 4; $\frac{1}{2}$; 0.6;

0.2; 0.04; $\frac{1}{6}$.

10. 22.36; 223.6; 0.2236; 0.02236.

11. 9.039; 6.509; 3.119; 6.033;

0.9039; 65.09; 311.9; 0.6033.

12. 40 毫米; 2.35 米; 2.5 厘米; 78 微米.

13. 0.925 吨; 1.375 克; 23750 毫克; 0.5 公斤.

14. 10.5 尺; 51 寸; 8.2 米; 8 厘米.

15. 500 米; 375 尺; 75 丈; 15000 尺.

16. 3600 秒; 1 小时 34 分 17 秒.

第 二 节

1. 第一对互为反号数，其余各对分别相等。

2. (1) a, $-a$, $-a$;

(2) $\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$, $-\frac{a}{b}$.

3. -1; -2; 3.2; 0.4; -0.5; -180.

4. -13; 3; -3; 3; -3; -3; -13; -13.

5. (1) -8.4, -7.2, -23, 1.87, -2.94, -2.72;

(2) -4.26, 53.91, -3.45, 18, -35.7, -1.55.

6. 0.2; 0.27; 0.42; 0.54.

7. 0.1米.

8. (1) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{41}{40}$, $\frac{1}{9}$;

(2) $-\frac{8}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{9}$, $-\frac{16}{5}$.

9. $\frac{1}{6}$; 6; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{ab}$; ab; $\frac{b}{a}$.

10. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{2}$.

11. (1) 27, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{7}{40}$, $-\frac{4}{3}$;

(2) $\frac{1}{3}$, $\frac{28}{5}$, $\frac{70}{81}$, $\frac{10}{7}$.

12. 偶数个负数之积为正，奇数个负数之积为负。

13. 60; 20; $-\frac{11}{12}$; 0.99.

14. (1) 2, -5; (2) $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$;

(3) -0.1, $9\sqrt{5}$; (4) -8, 3.

15. 160; $\frac{88}{135}$; -20; 0.6; $\frac{254}{81}$; 24; $-\frac{1}{70}$; 8.12.

16. (1) $-2ax$, $2ax$, $-2ax$;

(2) $-2a+2$, $-ab+ac$, $-ab-ac$;

(3) $a+b+c$, $a-b+c$, $a-b-c+d$, $a+b-c+d$.

17. $a-b+c-d=(a+c)-(b+d)$;

$1+a-b=1+(a-b)=1-(b-a)$;

$a-b+c-d=(a+c)+(-b-d)$;

$1-a+b=1-(a-b)=1+(b-a)$.

18. $b+c$; $a+c$; $c-b$; $a+c$; $-a-c$; $b-c$.

第 三 节

1. (1) $5x$, yx; (2) $\frac{a}{n}$, $-\frac{b}{n}$;

(3) $\frac{1}{a}$, $(2a)^2$; (4) $-a$, $2a^2$.

2. (1) $a=4b$; (2) $a=b+4b$;

(3) $a=4b+5$; (4) $a=4b-5$;

(5) $a=b\times25\%$; (6) $a=b-b\times25\%$.

3. $am+bn$。

4. (1) $\frac{1}{n}$; (2) $\frac{a}{n}$; (3) $\frac{s}{mt}$。

5. 181.5厘米; 2°C; 50公里/小时; $4x$。

6. 15米/秒; 72公里/小时; 200米/秒.

7. 20.5秒.

8. 105公里.

9. 3600公里.

10. -6; $a+b$; $-\frac{1}{2}$; $a(1-b)$; 4; $a+b$; $\frac{2}{3}$; 2;

$-\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$; 1; $\frac{13}{2}$; $\frac{b-cd}{a}$ $(a\neq 0)$.

11. (1) 7.74; (2) 65; (3) 2500;
(4) 33.33%; (5) 96%.

12. 320公斤.

13. 150吨.

14. 31.8吨.

15. 1333.3斤.

16. (1) $R_2=R-R_1$; (2) $H=\frac{v^2}{2g}$;

(3) $t=\frac{V-V_0}{aV_0}$; (4) $R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}$.

第 四 节

1. $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{5}{3}$; 100; $\frac{2}{3}$.

2. 11.2; 22.5; 0.35; 10; $\frac{ad}{b}$; $\frac{ad}{c}$.

4. 因$l=2\pi r$, 2π是常量,所以l与r成正比; 31.4米;
3.14a米.

5. 137公里.

6. 1.4米.

7.

宽	6	12	18	24	36
长	600	300	200	150	100

8．450 转/分.

9．黄豆：200 亩， 棉花：300 亩， 水稻：400 亩.

10．硫磺：15 公斤， 木炭：22.5 公斤， 硝石：112.5 公斤.

第 五 节

1．$-\frac{2}{3}$； $\frac{1}{15}$； $-\frac{19}{25}$； 28； $-\frac{23}{6}$； 11； $\frac{5}{3}$； 1； -2； 3.

2．$-\frac{b}{a}$； $\frac{c-b}{a}$； $\frac{4-b}{a-3}$； $\frac{d-b}{a-c}$； $\frac{cd-ab}{a-c}$； $a+b-c$；

$\frac{a}{c-b}$； $3a-2b$.

3．(1) $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$； (2) $t=t_0+\frac{T-T_0}{\alpha}$；

(3) $s=s_0+v(t-t_0)$； (4) $t=\frac{\beta-k\delta}{k\gamma-\alpha}$；

(5) $n_0=\frac{n_2m_1-n_1m_2}{m_1-m_2}$.

4．京广线长 2324 公里，陇海线长 1759 公里.

5．长江长 5820 公里，黄河长 4825 公里.

6．6 亩与 10 亩.

7．共生产粮食 160 斤，被夺去 100 斤.

8．2.4 天.

9．0.25 斤.

10．32 亩.

11．35 公里/小时.

12．7.6 公里/小时.

13．280.06 毫米.

14．金：380 克， 银：150 克.

复 习 题

1. (1) 100, $\frac{1}{100}$, 0, -0.01, -100;

   (2) 0.45, $\frac{2}{7}$, 0, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{4}{9}$.

2. 0.5; 0.8; $2.\dot{6}$①; $0.1\dot{6}$; 0.75; $0.\dot{4}$; 0.625.

3. 0.7071; 0.7071; 3.4642; 2.7321; 3.1463; 6.2832.

4. 5; 13; 25.

5. (1) 1.5°C, 2.5°C, −1.5°C, 2°C; (2) 0°C.

6. (1) $-(a+b)=(-a)+(-b)$; (2) $a-b=-(b-a)$;

   (3) $a+b=a-(-b)$.

7. 加上负数等于减去正数,结果变小; 减去负数等于加上正数,结果增大,可见,"加的结果增大了,减的结果变小了"一般地说是错的.

8. (1)、(2)、(3) 都是对的, (4) 是错的.

9. 第二行的两式、第三行的第二式是错的,其余是对的.

11. 因为当 $a=-b$ 时也成立 $a^2=b^2$,所以一般地说"从 $a^2=b^2$ 就断定 $a=b$"是错的.

13. 108 克.　　14. 360 克.

15. 400 克.　　16. 28%.

17. 94.63 克.

第 二 章

第 一 节

4. (1) $40x^7$; (2) $36x^4y^4$; (3) $2x^3y$; (4) $729x^{18}y^6$;

   (5) 1024; (6) $\frac{a^2b^8}{c^2}$; (7) $-500x^9$; (8) $\frac{8}{27}a^6y^{3n}$;

   (9) $64\frac{x^{24}}{y^6}$; (10) $-\frac{16\sqrt{2}}{a^9}$.

---

① $0.\dot{6}$ 表示循环小数 0.666….

5. 1.44×10^{10} 千卡.

6. 9.4608×10^{12} 公里.

7. 331104 倍.

第二节

1. (1) $3.28y^2$;　　(2) $-\frac{1}{4}a^2$;

(3) $\frac{13}{40}PH^2$;　　(4) $-x^2+(8-\sqrt{5})xy+y^2$;

(5) $8ax-9ax^2-8a^2x^2$.

2. (1) $7+2\sqrt{2}$;　　(2) $-5-6\sqrt{2}$.

4. 2800 平方毫米.

5. (1) $-x^2-5xy+7y^2$;　　(2) $-2h^2-2hg$;

(3) $2x-xy-6y$;　　(4) $19x^3-8x^2+6x-2$;

(5) a^2+b^2;　　(6) $5x^2-3x-3$;

(7) $5x^2+10xy-2y^2$.

6. (1) $72a^7b^8c^2$;　　(2) $-\frac{5}{2}a^{11}b^4c^{12}$;

(3) $-6(a+b)^{m+n}$;　　(4) $a^2+b^2-c^2$;

(5) $-x^4y^8z^3$;　　(6) $\frac{1}{4}x^3y^2-\frac{1}{6}x^2y^3-\frac{5}{18}xy^3$.

7. (1) $ac+ad+bc+bd$;　　(2) x^3-5x^2+2x+8;

(3) $1-x^4$;　　(4) $x^2+2xy+y^2-z^2$;

(5) $\frac{4}{9}m^2-n^2$;　　(6) $x^4-x^2y+\frac{1}{4}y^2$;

(7) $8x^3-27y^3$;　　(8) $4x^2-3y$;

(9) a^8-b^8;　　(10) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

9. (1) 88804;　　(2) 9991;　　(3) 9025;

(4) 1002001;　　(5) 80.99;

10. 右图面积为 $\pi a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$; $a=4$, 得 46.24 平方厘米.

左图面积为 $\pi a^2+(2a)^2-\pi r^2$; $a=4$, $r=2$, 得 101.68 平方厘米.

11. (1) $-88+28y-y^2$; (2) $\frac{49}{9}x^2+\frac{7\sqrt{5}}{3}xy+\frac{5}{4}y^2$;

(3) $a^4-2a^3+a^2-25$; (4) $8x^9-36x^6y^2+54x^3y^4-27y^6$;

(5) $\frac{1}{8}x^6+\frac{3}{4}x^4y+\frac{3}{2}x^2y^2+y^3$;

(6) $256x^4-32x^2+1$; (7) $x^3-\frac{1}{8}$;

(8) a^6+b^6; (9) $\frac{1}{8}R^3-8t^3$;

(10) $27x^3-64y^3$; (11) $x^2+4xy+4y^2-9z^2+6zw-w^2$;

(12) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4-z^4$;

(13) $2y^2+2z^2+2xy-2xz-4yz$.

第 三 节

1. (1) $x^2y(x-2)$; (2) $(x+y)(a+b+c)$;

(3) $4xy$; (4) $(a+b)^2(a-b)$;

(5) $-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$; (6) $(2x-3y)^2$;

(7) $(y+1)(y-1)(x-y)$; (8) $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$;

(9) $(x+3)(x^2-3x+9)(x-1)$;

(10) $(a-b)(5a+5b-1)$;

(11) $(x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)$;

(12) $(3x+2y-z)(3x-2y+z)$.

2. (1) 28; (2) 18.

3. (1) $(x-2)(x-12)$; (2) $-(a-11b)(a+3b)$;

(3) $(x-1)(3x-2)$; (4) $y(x-y)(x+2y)$;

(5) $(x+y+1)(x+y-3)$.

4. (1) $x^2-4x+(4)=(x-2)^2$;

(2) $4x^2+(4xy)+y^2=(2x+y)^2$,

或 $4x^2+(-4xy)+y^2=(2x-y)^2$;

(3) $a^2y^2+(2ay)+1=(ay+1)^2$,

或 $a^2y^2+(-2ay)+1=(ay-1)^2$;

(4) $2x^2-9x+\left(\frac{81}{8}\right)=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2$;

(5) $x^2+(a+b)x+\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)=\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2$;

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

5．(1) $(x-1)(x+5)$;　　(2) $\left(x-\frac{5-\sqrt{37}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)$;

(3) $(2x-5)(2x-1)$;　　(4) $2\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)$;

(5) $2\left(x-\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)$.

6．(1) $(2x-3)(2y+5)$，当 $x=2, y=3$ 时原式$=11$;

(2) $(3x+5)(2x-3)$，当 $x=2$ 时原式$=11$。

7．(1) $D=H+\frac{L^2}{4H}$;

(2) $D=15$ 厘米.

8．(1) $(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)$;

(2) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$;

(3) $(3x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

第　四　节

2．(1) $-\frac{9}{8}a^2b^2c^3$;　　(2) $\frac{x+3}{x+9}$;

(3) $xy(x+2y)$;　　(4) $\frac{b(a-b)}{a+b}$;

(5) $\frac{5x-7}{3x-5}$;　　(6) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$.

3．(1) $x-1+\frac{2}{x+1}$;　　(2) $x+1+\frac{x+2}{x^2-1}$;

(3) $x+\frac{5}{x^2+1}$;　　(4) $3-\frac{x-1}{x^2+2}$;

(5) $x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2(2x-3)}$.

5. (1) $\frac{2x(x^2-x+1)}{x+1}$; (2) $\frac{x+1}{x+2}$;

(3) $\frac{3}{x-y}$; (4) $\frac{xy+1}{y}$;

(5) $-\frac{(x+y)^6}{(x-y)^3}$; (6) $\left(\frac{x+a}{x-b}\right)^2$.

6. $\frac{ac}{t(t+c)}$吨.

7. (1) $\frac{x^2-x-3}{x}$; (2) $\frac{-2}{(x-3)(x+9)}$;

(3) $\frac{4x^2+12x-1}{4x^2(x+3)^2}$; (4) $\frac{-x+4}{2(x-2)^2}$;

(5) $\frac{41x-15}{2x(x-3)(x+3)}$; (6) $\frac{9x+7}{(x-1)(x+1)^2}$;

(7) x^2-2x-1; (8) $\frac{2x}{x-y}$.

8. (1) $\frac{x^2+xy+y^2}{y(x+y)}$; (2) $\frac{4}{3(a+1)}$;

(3) $\frac{x^2z+y^2x+z^2y}{x^2y+y^2z+z^2x}$; (4) $\frac{2}{x^3}$.

9. $\frac{G(2l-\pi r)}{2\pi lr^2}$吨/平方米.

10. $R=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$, $R=33.3$ 欧.

第 五 节

2. (1) $6\sqrt{2}$; (2) $\frac{13}{9}$;

(3) $xy\sqrt[8]{xy^2}$; (4) $\frac{1}{2c^2}\sqrt{3bc}$;

(5) $\frac{b\sqrt{a+b}}{a(a+b)}$.

3. (1) $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (2) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

(3) $a\sqrt{ab}$, $b\sqrt{ab}$, $\frac{1}{a}\sqrt{ab}$;

(4) $2x\sqrt{a}$, $\frac{3x}{2}\sqrt{a}$, $\frac{x^2}{a}\sqrt{a}$.

4. (1) 2; (2) $2\sqrt{6}$;

(3) $\frac{(x-y)\sqrt[3]{x+y}}{x+y}$; (4) $2xy$;

(5) 528; (6) $(a+b)\sqrt{ab}$;

(7) $\frac{x^2-13x+18-6\sqrt{x}}{9-x}$; (8) $\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x}$;

(9) $1-x$.

5. (1) 2; (2) $\sqrt{3}a-b$;

(3) $a\sqrt[3]{a^2x}$; (4) $\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})$;

(5) $\frac{a-b}{a+b}$; (6) $(x+y)^2$.

6. $I=\sqrt{\frac{Q}{0.24Rt}}$.

7. $6\sqrt[3]{a^2}$ 平方米, 54 平方米.

8. (1) 0.536; (2) 3.146.

9. $d=\frac{1}{100\pi}\sqrt{10\pi p}$.

10. 甲错. 当 $a=4$ 时 $1-a$ 是负数, $\sqrt{(1-a)^2}$ 不等于 $1-a$.

复 习 题

1. (1) $(ab)^n$; (2) $\frac{9x^4z^2}{16y^2}$;

(3) 1; (4) 1;

(5) $-2.5a^6b^8c^5$;　　(6) $-\frac{1}{2}a^7$;

(7) $-\frac{27}{50}x^8y^9z^4$;　　(8) $-10x^2y^7$;

(9) $6x^{n+8}y^{m+2}z$.

2. 27 公斤.

3. 3.75×10^{12} 吨.

4. (1) 0;　　(2) -19;　　(3) -2×27^n.

5. (1) a^3+1;　　(2) $x^2-y^2-2yz-z^2$;

(3) x^6-1;　　(4) $6xy(2x-y)$.

7. (1) a^4-b^4;　　(2) $-2x^4+1$.

8. (1) $xy(x-y)(xy+2)$;

(2) $\left(\frac{9}{4}a^2+\frac{4}{9}b^2\right)\left(\frac{3}{2}a-\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{3}{2}a+\frac{2}{3}b\right)$;

(3) $(x-y+a+b)(x+y+a-b)$;

(4) $(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$;

(5) $(2x-1+\sqrt{2})(2x-1-\sqrt{2})$;

(6) $(x+1)^2(x^2+1)$;

(7) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

(8) $(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10})$;

(9) $(x+y)(y+z)(z+x)$;　(10) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

9. (1) $(x-0.1)(x-0.9)$;　　(2) $(16x+y)(x-2y)$.

11. (1) $\frac{30a^3c-21ab^3+22bc^3}{18a^2b^2c^2}$;　(2) $\frac{2b^3}{a^2-ab+b^2}$;

(3) 1;　　(4) $-\frac{x+1}{x}$;

(5) $\frac{(2x+1)^2(x-3)}{2x-1}$;　　(6) 0.

12. (1) $\frac{1}{(x-1)(x-3)}$;　　(2) $\frac{2x(b^2-c^2)}{(x^2-b^2)(x^2-c^2)}$;

(3) $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$;　　(4) $\frac{(x-7)(x-3)}{4}$;

(5) $1-\left(\frac{x}{y}\right)^2$;　　(6) $\frac{1}{x}$;

(7) a^3+1.

13. (1) $4\sqrt{3}=6.928$;　　(2) 450;

(3) 1.68;　　(4) $\frac{3}{2}$;

(5) 1.12;　　(6) $-3x\sqrt{3-x}\quad(x<0)$;

(7) $2-x\quad(x<2)$;　　(8) $a+\sqrt{b}$.

15. (1) $x-2\sqrt{x}-1$;　　(2) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{b(a-b)}-1$;

(3) $-4\sqrt{x(x+1)}$;　　(4) $\frac{10x-3\sqrt{1+x}+9}{4x+3}$;

(5) 10;　　(6) $\sqrt{a^2-b^2}$;

(7) $(a+b)\sqrt{a^2-b^2}(1-a^2-b^2)$;

(8) 7.

16. $m=0.707$.

17. (1) $\frac{2}{23}(15\sqrt{2}+14\sqrt{3}-12\sqrt{6}-6)$;

(2) $\frac{(\sqrt{5}+1)(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{4}$;

(3) $\sqrt{1+a^2}$.

19. 92.58 吨.

20. 159.12 公斤.

21. 1256 平方厘米.

22. (1) 1.004 误差为 0.000004;

(2) 0.996 误差为 0.000004;

(3) 1.15　误差为 0.007625;

(4) 0.85　误差为 0.007375.

23. $\frac{2m}{a(a-2)}$吨.

24. $\frac{nk+mt}{n(n-t)}$件，20 件.

25. $\frac{1841}{3v}$小时，40.9 小时.

26. (1) $S=\rho\frac{l}{R}$;　　(2) $S=17.5$ 平方毫米.

27. $(4-2\sqrt{\pi})\sqrt{Vh}\approx0.456\sqrt{Vh}$平方米.

第 三 章

第 一 节

2. (1) $\begin{cases}x=2,\\y=6;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=6,\\y=4;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}u=7,\\v=5;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}v=7.5,\\t=0.5;\end{cases}$　(5) $\begin{cases}x=-\frac{9}{8},\\y=-\frac{49}{16};\end{cases}$　(6) $\begin{cases}x=a-b,\\y=-a-b.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}x=4,\\y=-3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=3,\\y=10;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}s=8,\\t=1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=2,\\y=5;\end{cases}$　(5) $\begin{cases}y=18,\\z=12;\end{cases}$　(6) $\begin{cases}x=2a,\\y=-b.\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}x=4,\\y=-1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x=5,\\y=7;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x=6,\\y=8;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=-\frac{7}{2},\\y=\frac{7}{2};\end{cases}$　(5) $\begin{cases}x=8,\\y=2;\end{cases}$　(6) $\begin{cases}s=-\frac{16}{5},\\t=\frac{5}{2};\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=\frac{ab}{b+c},\\y=\frac{ac}{b+c};\end{cases}$　(8) $\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$　(9) $\begin{cases}y=2,\\z=\frac{1}{3};\end{cases}$

(10) $\begin{cases}x=-6,\\y=1,\\z=2;\end{cases}$　(11) $\begin{cases}x=-5,\\y=0,\\z=\frac{9}{2};\end{cases}$　(12) $\begin{cases}x=5,\\y=\frac{1}{3},\\z=-2.\end{cases}$

5. (1) $\begin{cases} x=\dfrac{50}{31}, \\ y=\dfrac{-8}{31}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\dfrac{26}{7}, \\ y=\dfrac{-9}{7}; \end{cases}$ (3) 有无限多组解;

(4) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}, \\ y=\dfrac{9}{10}, \\ z=\dfrac{17}{20}; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ z=2; \end{cases}$

(7) 有无限多组解.

6. (1) $I=\sqrt{\dfrac{P}{R}}$; (2) $B=\dfrac{\omega}{h}+mh$; (3) $W=\dfrac{3RT}{2N}$.

7. (1) $A=2$, $B=-1$; (2) $A=1$, $B=2$, $C=-1$.

8. 加工机轴的是 40 人,加工轴承的是 50 人.

9. 装棉花 200 吨,生铁 600 吨.

10. 第一块地原来生产小麦 2580 斤,第二块地原来生产小麦 3150 斤.

11. 废酸 200 斤,浓硫酸 400 斤.

12. $\begin{cases} a=1, \\ b=0, \\ c=-1. \end{cases}$

第　二　节

1. (1) $x=\pm\dfrac{4}{3}$; (2) $x_1=0$, $x_2=-\dfrac{7}{2}$;

(3) $x_1=0$, $x_2=2\sqrt{2}$; (4) $x_1=\dfrac{7}{2}$, $x_2=-\dfrac{3}{2}$;

(5) $x_1=1$, $x_2=-1$.

2. (1) $x_1=-1$, $x_2=-2$; (2) $y_1=1$, $y_2=4$;

(3) $x_1=-3$, $x_2=1$; (4) $x_1=3$, $x_2=-2$;

(5) $x_1=\dfrac{5}{2}$, $x_2=-2$; (6) $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=3$.

3. (1) $x=-2\pm\sqrt{3}$;　　(2) $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$;

(3) $s_1=2$, $s_2=-\frac{1}{2}$;　　(4) $x=\frac{2\pm\sqrt{39}}{5}$;

(5) $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}$.

4. (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$;　　(2) $x=\frac{2\pm\sqrt{5}\,i}{3}$;

(3) $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=-3$;　　(4) $y=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{2}$;

(5) $y=\frac{5\pm\sqrt{11}i}{2}$;　　(6) $x=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{10}i}{4}$;

(7) $z=3$(重根);　　(8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{n}{m}$.

5. (1) $x=0$;　　(2) $y=\frac{11\pm\sqrt{33}}{4}$;

(3) $x_1=a$, $x_2=\frac{1}{a}$;　　(4) $x=-\frac{1}{3}$;

(5) $x=12$;　　(6) $x=7$;

(7) $x=\frac{29}{26}$;　　(8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{27}{8}$;

(9) $x=\frac{49}{4}$;　　(10) $x_1=0$, $x_2=a$;

(11) $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{i}{2}$, $x_4=-\frac{i}{2}$;

(12) $x_1=0$, $x_2=\frac{3+\sqrt{29}}{2}$, $x_3=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$;

(13) $x_1=1$(重根), $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=2$;

(14) $r_1=1$, $r_2=-4$.

6. (1) $\begin{cases} x_1=8, \\ y_1=6, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-6, \\ y_2=-8; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=7, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=7, \\ y_2=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=-6, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=6, \\ y_2=1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=9, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=9, \\ y_2=4. \end{cases}$

7. 边长为 0.23 米.

8. $x=0.207l$.

9. (1) $t=14.3$ 秒; (2) $t=14.2$ 秒.

10. $b=8$ 毫米.

11. 长为 1.25 米，宽为 0.75 米.

12. 8 天.

第 三 节

4. (1) $x>5$, $(5, +\infty)$; (2) $x<2$, $(-\infty, 2)$;

(3) $x>0$, $(0, +\infty)$; (4) $x>\frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;

(5) $x<-\frac{1}{2}$, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$; (6) $t<\frac{7}{5}$, $\left(-\infty, \frac{7}{5}\right)$;

(7) 当 $a>0$ 时，$x\leqslant\frac{c-b}{a}$, $\left(-\infty, \frac{c-b}{a}\right]$;

当 $a<0$ 时，$x\geqslant\frac{c-b}{a}$, $\left[\frac{c-b}{a}, +\infty\right)$;

(8) $x<-1$, $x>1$, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$;

(9) $x<\frac{1}{3}$; $x>2$, $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $(2, +\infty)$;

(10) $x<1$, $x>\frac{3}{2}$, $(-\infty, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$;

(11) $-4\leqslant x<-1$, $[-4, -1)$;

(12) $-1\leqslant x\leqslant 4$, $[-1, 4]$.

5. (2) (i) $2(x+3)-5>0$, $x>-\frac{1}{2}$; $2(x+3)-5=0$, $x=-\frac{1}{2}$;

$2(x+3)-5<0$, $x<-\frac{1}{2}$.

(ii) $-4(x-3)+5>0,\quad x<\frac{17}{4};$

$-4(x-3)+5=0,\quad x=\frac{17}{4};$

$-4(x-3)+5<0,\quad x>\frac{17}{4}.$

6. 2.8 元到 3.15 元.

7. 80 立方米.

8. $0.95U_0\leqslant U\leqslant 1.1U_0$.

10. (1) $x_1=0,\quad x_2=2;$　　(2) $x_1=0,\quad x_2=-\frac{4}{3}.$

11. (1) $(-10,\ 10);$　　(2) $(-\infty,\ -5),\ (5,\ +\infty);$

(3) $\left(-\frac{10}{3},\ \frac{10}{3}\right);$　　(4) $(-14,\ 6);$

(5) $\left[\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right];$　　(6) $(a-b,\ a+b);$

(7) $(-\infty,\ -a-b],\ [b-a,\ +\infty).$

复　习　题

3. (1) $\begin{cases}p=1.5,\\ q=2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=1,\\ y=-1;\end{cases}$

(3) 无限多组解;　　(4) 无解;

(5) $\begin{cases}x=a+b,\\ y=a-b;\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x=\frac{k}{l},\\ y=1;\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=1,\\ y=5,\\ z=3;\end{cases}$　　(8) $\begin{cases}x=\frac{a+b-c}{2},\\ y=\frac{a-b+c}{2},\\ z=\frac{a-b-c}{2};\end{cases}$

(9) $\begin{cases}x_1=4\sqrt{3},\\ y_1=6,\\ z_1=2\sqrt{3},\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-4\sqrt{3},\\ y_2=-6,\\ z_2=2\sqrt{3},\end{cases}$　$\begin{cases}x_3=-4\sqrt{3},\\ y_3=6,\\ z_3=-2\sqrt{3},\end{cases}$

$$\begin{cases} x_4 = 4\sqrt{3}, \\ y_4 = -6, \\ z_4 = -2\sqrt{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = 0, \\ y_5 = 0, \\ z_5 = 0. \end{cases}$$

4. (1) $\begin{cases} x = -\dfrac{31}{9}, \\ y = \dfrac{25}{9}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = a+b, \\ y = a-b; \end{cases}$ (3) 无解;

(4) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = -1; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = a+b; \end{cases}$ (6) 无解。

5. (1) $t_1 = 6$, $t_2 = -2$; (2) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$;

(3) $x = \pm 8$; (4) $x = 0$;

(5) $x_1 = a$, $x_2 = -3a$; (6) $x_1 = \dfrac{b-a}{a+b}$, $x_2 = \dfrac{a+b}{a-b}$;

(7) $x_1 = 0$, $x_2 = a^2$; (8) $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

7. (1) $k > -\dfrac{9}{4}$(两个不等的实数根), $k = -\dfrac{9}{4}$(重根), $k < -\dfrac{9}{4}$(复数根);

(2) $k < -3$, $k > 3$(两个不等的实数根), $k = \pm 3$(重根), $-3 < k < 3$(复数根).

8. (1) $\pm\dfrac{1}{2}$, ± 2; (2) 0, $\pm\sqrt{3}$, $\pm i$;

(3) -1, $\pm\sqrt{2}$; (4) $1 \pm \sqrt{7}$, $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$;

(5) $x = 5$; (6) $3 \pm \sqrt{10}$, $-\dfrac{1}{2}$, 2;

(7) 无解; (8) $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{14}{3}$.

9. (1) $\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = b, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{a+b}{2}, \\ y_2 = \dfrac{a+b}{2}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{3}{5}, \\ y_2 = \dfrac{4}{5}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\frac{3}{7},\\y=-\frac{3}{2};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x_1=64,\\y_1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=64;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{1}{3}.\end{cases}$

10. (1) $x\leqslant-\frac{7}{2}$, $\left(-\infty,\ -\frac{7}{2}\right]$;

(2) $0\leqslant x\leqslant 3$, $[0,\ 3]$;

(3) $x<\frac{5}{2}$, $x>4$, $\left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right)$, $(4,\ +\infty)$;

(4) $x\leqslant-10$, $x\geqslant 10$, $(-\infty,\ -10]$, $[10,\ +\infty]$;

(5) $-\frac{7}{5}<x<-\frac{2}{5}$, $\frac{8}{5}<x<\frac{13}{5}$, $\left(-\frac{7}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.

11. 从甲罐内倒出3公斤,乙罐内倒出8公斤.

12. 正方体体积1000立方厘米,长方体体积960立方厘米.

13. (1) 经过3秒或5秒;

(2) 经4秒;

(3) 不可能.

14. 直径是8厘米.

第 四 章

第 一 节

1. (1) $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{16}$, 1, 1, $-\frac{1}{2}$;

(2) 1000, 4, $-\frac{27}{8}$, 1;

(3) 1, -23, 1.

2. (1) 3×10^5 厘米/秒; (2) 1×10^{-8} 厘米;

(3) 2.7×10^{-13} 厘米.

3. (1) $\frac{ab}{c^2}$; (2) $\frac{2c^2}{a^3b}$;

(3) xyz^2;　　(4) $\dfrac{8b^4x}{5ay^2}$;　　(5) $\dfrac{b-a}{b+a}$.

4. (1) 0.000064;　　(2) $\dfrac{64}{729}$;

(3) a;　　(4) $\dfrac{3}{2}ab^{-2}x^{-3}$;

(5) $\dfrac{10}{3}x^{-6}y^7$;　　(6) $40a^{-1}b^2c^{-5}$;

(7) $\dfrac{1}{81}x^{-8}y^{-4}$;　　(8) axy^{-5};

(9) $-\dfrac{1}{8}x^6y^{-9}$;　　(10) $\dfrac{8}{3}a^6x^{16}$.

5. (1) a^2b^{-4};　　(2) $4a^{-8}b^6x$;

(3) $a^{-5}b^{-17}c^6x^{-1}$;　　(4) $a^{-2}b^{-7}$;

(5) $a^{-10}b^6c$.

6. $y_1\Big|_{x=3}=192$, $y_2\Big|_{x=3}=\dfrac{1}{9}$; $y_1\Big|_{x=\frac{2}{3}}=\dfrac{250}{81}$, $y_2\Big|_{x=\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{20}$.

7. (1) $y=\dfrac{3}{32}$;　　(2) $y=\dfrac{12}{125}$;　　(3) $y=\dfrac{5}{54}$.

8. (1) 12000 吨;　　(2) $f=9\times10^4$;　　(3) $\eta\approx3.22\times10^{14}$.

9. $2^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{7}{4}}$; $a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}}$; $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$; $3^{-\frac{1}{2}}$; $7^{-\frac{1}{3}}$; $y^{-\frac{3}{2}}$; $b^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$.

10. $\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[6]{x^5}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^4}}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}$.

11. (1) $x^{\frac{5}{3}}$;　(2) x^2y^{-1};　(3) $-\dfrac{1}{3}a$;　(4) $a^{-1}b^{\frac{2}{3}}$;　(5) $25a^{-4}$;

(6) $\dfrac{3}{2}xy^2$;　(7) $c^{-\frac{1}{3}}d^{-\frac{1}{2}}$;　(8) a;　(9) $x^{\frac{23}{12}}$.

12. (1) $4x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{5}{3}}+x^2$;　　(2) $x^{-1}+2+x$;

(3) $4a^{\frac{2}{3}}-9b^{\frac{1}{2}}$.

13. (1) $H=(a^{\frac{3}{2}}h^3-1)^{\frac{1}{2}}$;　　(2) $v=\left(\dfrac{\gamma-\alpha u^{\frac{3}{2}}}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}$.

第 二 节

1. $\log_4 1024=5$; $\log_{10}1000=3$; $\log_{10}0.001=-3$;

   $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$; $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}=3$; $\log_3 y=x$.

2. $3^4=81$; $2^{-3}=\frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^y=x$; $10^{-2}=0.01$; $10^c=ab$.

3. 2; $\frac{1}{2}$; 9; 1; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{4}$.

4. (1) 9, 32, $\frac{3}{7}$; (2) -3; (3) $-n$.

6. (1) 0, 1, 2, 3; (2) -1, -2, -3, -4;

   (3) $\log_{10}\underbrace{10\cdots0}_{n\text{个}0}=n$ ($n=0$, 1, 2, …),

   $\log_{10}\underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}0}=-n$ ($n=1$, 2, …).

7. 3.3010; 4.4771; -1.6990; -3.5229; 1.6020; 0.2552; 1.0791.

8. (1) 7.5; (2) $\frac{a^c}{b}$;

   (3) $\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}$; (4) $10^5 a^{\frac{1}{3}}$;

   (5) 2.

第 三 节

1. 0.3701; 1.3701; 2.3701; -2.6299; -0.2396; 0.6355; 1.5741; -0.3981.

2. 553400; 553.4; 5.534; 0.5534; 1653; 0.0271; 0.4511; 0.0006977.

3. (1) 0.02595; (2) 0.8217; (3) 6.173; (4) 91910;

   (5) 1.215; (6) 55.04; (7) -28.99; (8) 1.463.

4. 207 米.

5. 2.2 秒.

6. 0.000002724 公里/秒^2.

7. $v_1=7.902$ 公里/秒; $v_2=11.18$ 公里/秒.

8. 21410 吨.

第 四 节

1. (1) 1.4429; (2) 2.0704; (3) 0.8445; (4) 0.5001.

2. (1) 0.5110; (2) 3.322; (3) $x_1=3.24$, $x_2=-0.86$;
   (4) 0.693; (5) -1.404.

3. (1) 10.002; (2) 2.0004; (3) 2.0798; (4) -0.6874;
   (5) 6.909; (6) -6.909.

4. (1) ab; (2) $a^3\sqrt{b}$; (3) ae^c; (4) e.

5. $e^{6.4133}$; $e^{5.3551}$; $e^{-3.3370}$; $e^{-1.3473}$; $e^{3.9519}$.

6. 6.1.

复 习 题

1. (1) $m^3+m^2-m^{-1}-m^{-3}$; (2) $-\frac{1}{2}ab^{\frac{1}{3}}$;
   (3) $a^{-6}+3a^{-4}b^{-1}+3a^{-2}b^{-2}+b^{-3}$;
   (4) $4a$; (5) 1;
   (6) $x-y$; (7) $x+y$.

2. 2.99×10^{-23} 克.

3. 185 瓩.

4. 2.3694×10^{-2} 安培.

5. (1) $\left(\frac{3}{4}V\right)^{\frac{1}{3}}$; (2) $(A^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}H^{-\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}}$; (3) $(nVJ^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$.

6. (1) 1; (2) 1; (3) 0; (4) 0.

7. (6) 提示:真数$x+\sqrt{x^2-1}$看作分数,分子、分母同乘以$x-\sqrt{x^2-1}$,再进行运算.

8. (1) -407600; (2) 13.98; (3) 1.0496; (4) -0.04146.

9. $2.303RC$.

10. 53.61 倍.

11. 3 圈.

第 五 章

第 一 节

3. (1) $(-3, 5)$, $(2, 1)$; (2) $(3, -5)$, $(-2, -1)$.

4. $OM_1=\sqrt{34}$, $OM_2=\sqrt{34}$, $OM_3=2\sqrt{5}$, $OM_4=2\sqrt{5}$.

6. (3) 有公共终边的角有如下各组:

(i) $30°$、$390°$、$-330°$, 可表作 $30°+k\cdot 360°(k=0, \pm 1)$;

(ii) $-90°$ 和 $270°$, 可表作 $-90°+k\cdot 360°(k=0, 1)$;

(iii) $180°$ 和 $-180°$, 可表作 $180°+k\cdot 360°(k=0, -1)$;

(iv) $0°$ 和 $360°$, 可表作 $k\cdot 360°(k=0, 1)$.

(4) 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{13}{6}\pi$,

$-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$.

7. 时间相隔 5 分钟, 分针转过 $30°$ $\left(即\frac{\pi}{6}\right)$; 相隔三小时, 分针转过 $3\times 360°$(即6π), 时针转过$90°$$\left(即\frac{\pi}{2}\right)$; 相隔六小时, 分针转过 $6\times 360°$ (即 12π), 时针转过 $180°$(即 π).

8. $330°$, $285°$, $270°$, $80°$, $30°$, $195°$, $70°$.

9. $\frac{7}{6}\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{6}\pi$.

10. $2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\pi+2k\pi$, $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$,

$\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

第 二 节

1.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
M_1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
M_2	$\frac{12}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{12}{5}$
M_3	$-\frac{5}{\sqrt{89}}$	$-\frac{8}{\sqrt{89}}$	$\frac{5}{8}$
M_4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. (1) $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;

(2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

3. $\cos 4.2\pi>0$, $\sin 5.3\pi<0$, $\operatorname{tg} 6.4\pi>0$, $\cos(-3)<0$, $\sin(-2)<0$.

4. (1) II、IV 象限; (2) III、IV 象限; (3) I、IV 象限;
(4) I、II 象限; (5) I、II 象限; (6) II、IV 象限.

5. (1) II、III 象限; (2) III、IV 象限;
(3) I、III 象限; (4) I、II 象限.

6. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}=0.86603$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}=0.70711$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}=0.57735$; (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}=0.86603$;

(5) $\frac{1}{2}=0.5$; (6) 1.

7. 在 α 的终边上取点 $M(x, y)$, 记 $OM=r$, 则

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{y}{r}+\frac{x}{r}=\frac{x+y}{r}>1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}>\frac{y}{r}=\sin\alpha.$$

9. (1) $\frac{\pi}{3}$;　　(2) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$;

(3) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$　$(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

10. $\frac{6}{11}$.

第 三 节

1.

α	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1.

3. (1) 16;　(2) $(a-b)^2$;　(3) -3.

4. -0.99396,　-0.32061,　-0.74198,　3.4197,　0.59061,
-0.4368,　0.66393,　0.34693.

5. (1) π, 2π, 2π;

(2) $-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

6. (1) $2\sqrt{3}$;　(2) 1;　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$;　(4) 1;　(5) $\frac{8}{5}$;　(6) -1.

第 四 节

1. 0, $\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $-\frac{\pi}{4}$.

2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$.

4. (1) $35°$; (2) $40°30'$; (3) $-57°$; (4) $237°$;

(5) $-54°$; (6) $-36°$; (7) $\frac{\pi}{6}+2\pi$, $\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k=0, 1)$;

(8) $-\pi-\frac{\pi}{3}$, $-3\pi+\frac{\pi}{3}$.

6. 无, 无, arc tg 2.

复 习 题

1. $y=r\sin\omega t$.

5. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\frac{12}{13}$, $\frac{12}{13}$; (3) 1.

6.

	$\sin x=a$	$\sin x=-a$
x	$\arcsin a+2k\pi$ 和 $\pi-\arcsin a+2k\pi$	$\arcsin(-a)+2k\pi$ 和 $\pi-\arcsin(-a)+2k\pi$
	$\cos x=a$	$\cos x=-a$
x	$\pm\arccos a+2k\pi$	$\pm\arccos(-a)+2k\pi$

7. $\theta=\arcsin\left(\frac{1}{v}\sqrt{19.6h}\right)$.

第 六 章

第 一 节

1. $\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$.

2. $\frac{40}{41}$, $-\frac{40}{9}$, $-\frac{9}{40}$.

4. 0.81, -0.58.

5. $-\frac{8\sqrt{89}}{89}$, $-\frac{5\sqrt{89}}{89}$.

6. $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

7. 2.

8. 9.

9. (1) $\sec^2\alpha$; (2) $\cos^2\alpha$; (3) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; (4) $2\sin^2\alpha$; (5) $2\cos^2\alpha$; (6) 4.

第 二 节

1. (1) 0; (2) 1; (3) $\sqrt{3}$.

2. $\frac{171}{221}$, $\frac{140}{221}$.

3. $\frac{1}{12}(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})$.

4. 0.28.

5. -1.

6. -1, $\frac{1}{7}$.

7. $\frac{1}{2}$.

8. $\frac{17}{7}$.

10. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,

$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

12. (1) $\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin 2t+\frac{5\sqrt{2}}{2}\cos 2t$;

(2) $3\sqrt{3}\sin 3t+3\cos 3t$;

(3) $\frac{7}{2}\sin 4t-\frac{7}{2}\sqrt{3}\cos 4t$;

(4) $3.3922\sin 2t+2.1197\cos 2t$.

13. (1) $\sqrt{13}\sin(4t+56°19')$;

(2) $\sqrt{41}\sin(3t+51°20')$;

(3) $\sqrt{41}\sin(3t-51°20')$;

(4) $\sqrt{41}\sin(3t+231°20')$.

第 三 节

1. (1) ± 0.96, -0.28; (2) $\frac{3}{4}$.

2. $\frac{120}{169}$, $-\frac{119}{169}$.

3. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

4. $-\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$, 2.

5. $\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{12}$.

6. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\frac{-\sqrt{17}}{17}$, -4.

7. $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{5}$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

9. 设圆心角为 α, 则圆周角为 $\frac{\alpha}{2}$.

当 α 为锐角时, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$;

当 α 为钝角时, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

第 四 节

1. (1) $2\sin 55^\circ\cos 25^\circ$; (2) $-\sqrt{3}\sin 12^\circ$;
   (3) $\sqrt{2}\sin 25^\circ$.

2. (1) $2\cos 2\alpha\sin\alpha$; (2) $\sqrt{2}\cos\alpha$;
   (3) $2\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;
   (4) $4\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$.

3. (1) $\frac{1}{4}$;　(2) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$;　(3) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

4. (1) $\frac{1}{2}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)$;　(2) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$;

(3) $\frac{1}{2}(\sin 3\alpha+\sin\alpha)$.

第 五 节

1. (1) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$　(n 是整数);　(2) $(2n+1)\pi$　(n 是整数);

(3) $n\pi$　(n 是整数).

2. (1) $2n\pi-\frac{\pi}{4}$ 和 $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$　(n 是整数);

(2) $4n\pi+\frac{5}{6}\pi$ 和 $4n\pi-\frac{13}{6}\pi$　(n 是整数);

(3) $4\pi(3n+1)$ 和 $4\pi(3n+2)$　(n 是整数);

(4) $\left(n+\frac{1}{12}\right)\frac{\pi}{2}$ 和 $\left(n-\frac{7}{12}\right)\frac{\pi}{2}$　(n 是整数);

(5) $2n\pi+\frac{\pi}{12}$ 和 $(2n+1)\pi-\frac{7}{12}\pi$　(n 是整数);

(6) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$　(n 是整数);

(7) $2n\pi\pm\frac{2}{5}\pi$ 和 $2n\pi\pm\frac{4}{5}\pi$　(n 是整数);

(8) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $n\pi$　(n 是整数);

(9) $2n\pi$, $4n\pi+\frac{\pi}{3}$ 和 $4n\pi+\frac{5}{3}\pi$　(n 是整数);

(10) $n\cdot 90^\circ-22.5^\circ$ 和 $n\cdot 90^\circ+35^\circ 47'$　(n 是整数);

(11) $\frac{n\pi}{2}$, $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 和 $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$　(n 是整数);

(12) $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$ 和 $2n\pi$　(n 是整数);

(13) $\frac{n\pi}{2}$ 和 $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$　(n 是整数);

(14) $2n\pi-\frac{\pi}{6}$ 和 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ （n 是整数）；

(15) $n\cdot 360°+46°24'$ 和 $n\cdot 360°+90°$ （n 是整数）。

复 习 题

1．当 α 在第 II 象限时，$\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{8}{15}$，$\sec\alpha=-\frac{17}{8}$，$\csc\alpha=\frac{17}{15}$。

当 α 在第 IV 象限时，$\sin\alpha=-\frac{15}{17}$，$\cos\alpha=\frac{8}{17}$，$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{8}{15}$，$\sec\alpha=\frac{17}{8}$，$\csc\alpha=-\frac{17}{15}$。

2．(1) $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$；　　(2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

4．(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\cos\alpha$。

5．(1) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$；　　(2) $\frac{3\sqrt{7}+2}{10}$，$-\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{7})}{10}$。

6．1。

8．(1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\sqrt{5}}{5}$；　　(2) $\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}$。

10．(1) $4\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$；

(2) $4\cos 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$。

11．(1) $(2n+1)\pi$ 和 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ （n 是整数）；

(2) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 和 $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$ （n 是整数）；

(3) $2n\pi$ 和 $\frac{(2n+1)\pi}{9}$ （n 是整数）；

(4) $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 和 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ （n 是整数）。

第 七 章

第 一 节

3. (1) $n=600t$; (2) $y=18x$;
   (3) $v=\frac{100}{t}$; (4) $V=100+0.057T$.

4. (1) 698、678、673 毫米水银柱; (2) 190、610 米.

第 二 节

2. (1) 正比函数; (2) 反比函数;
   (3) 正比函数; (4) 反比函数.
4. $t=1$ 秒, $v=9.8$ 米/秒; $t=2$ 秒, $v=19.6$ 米/秒.
6. (1) 正比函数; (2) 正比函数; (3) 反比函数.
8. 链轮转一圈,飞轮转 2.3 圈时,飞轮 20 个齿,链轮应是 46 齿; 链轮转一圈,飞轮转 1.8 圈时,飞轮 20 个齿,链轮应是 36 齿.
9. $C=\frac{5}{9}(F-32)$.
10. $S=H-R\omega t$, $t=31.8$ 秒.
11. $f=\frac{3\times10^8}{\lambda}$, $\lambda=15$ 米.
12. 顶点都是原点; 开口从大到小依次为 (2)、(4)、(3)、(1).
16. $y=x^{\frac{1}{4}}$, $y=x-1$, $y=2x+3$.
18. (2) $\rho=0.1$; (3) $R=25+0.1T$.

第 三 节

5. (1) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$; (2) $y=10^x$;
   (3) $y=10^{-x}$; (4) $y=e^x+2$.

第 四 节

2. (1) $\sin 210°>\sin(-60°)$, $\sin\frac{3\pi}{2}<\sin\frac{7\pi}{6}$;

(2) 0, 1, 0, -1;

(3) $x=2k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$) 时，$\cos x$ 取最大值 1，

$x=(2k+1)\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)时，$\cos x$ 取最小值 -1；

(4) $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)。

3. (1) 2π; (2) 4π; (3) 2π; (4) π.

7. (1) $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; (2) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

(3) $y=2\sin 2x$。

8. (1) $\frac{\pi}{6}$; (2) $\frac{\pi}{6}$ 与 $\frac{5\pi}{6}$;

(3) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)。

9. (1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{5\pi}{3}$;

(3) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)。

复 习 题

1. (1) $P=\frac{W}{Q}$; (2) $y=40-6t$;

(3) $s=150t$，正比函数； (4) $V=0.528l$，105.6 立方米。

2. $V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\varphi)^2\sqrt{4\pi\varphi-\varphi^2}$.

8. (1) $y=3\sqrt{2}$; (2) 6; (3) $\frac{2\pi}{5}$。

第 八 章

第 一 节

1. (1) 1, 3, 5, $\cdots$, $2n-1$, $\cdots$; (2) -2, -4, -6, $\cdots$, $-2n$, $\cdots$;

(3) 0, 0.3010, 0.4771, 0.6021, 0.6990, 0.7882, 0.8451, 0.9031, 0.9542, 1.

2. (1) 1, 3, 5, 7, 9;　(2) 3, 5, 7, 9, 11;

(3) −1, 1, −1, 1, −1;　(4) 1, −2, 3, −4, 5;

(5) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$;　(6) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$;

(7) 3, 9, 19, 33, 51;　(8) 1, 3, 6, 10, 15.

3. (1) $a_n=10n$, $a_8=80$;　(2) $a_n=\frac{n+2}{n+1}$, $a_8=\frac{10}{9}$;

(3) $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_8=\frac{1}{64}$;　(4) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$, $a_8=-\frac{1}{256}$.

4. (1) 1;　(2) $-\frac{25}{3}$;　(3) 58.

5. (1) 5050;　(2) 1645.

6. 15 秒.

7. 1700 米.

8. (1) 122.5 米;　(2) 10 秒.

9. (1) $-\frac{4}{243}$;　(2) $n=8$, $S_n=349.5$;

(3) $a_1=6$, $q=-\frac{1}{2}$ 或 $a_1=\frac{3}{2}$, $q=1$.

10. $2^{-\frac{1}{25}}$.

11. 3 年.

第　二　节

2. (1) 5040;　(2) 672;　(3) 5005;　(4) 24360;

(5) $\frac{3}{20}$;　(6) 720;　(7) 210;　(8) $\frac{15}{7}$.

4. 720; 600.

5. 64.

6. 1680.

7. 32; 10.

8. (1) 455;　(2) 1313400;　(3) 20;　(4) 31.

10. $C_{100}^{4}=3921225$; $C_{99}^{3}=156849$.

11. 300.

12. 127.

13．28；2。

14．20；12。

第 三 节

4．(1) $x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$；

(2) $1-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{27}x^3+\frac{1}{81}x^4$。

5．$\frac{35}{16}$.

6．(1) 1.02；　　(2) 6526.08。

复 习 题

1．(1) 5，8，11，14；　　(2) 1，1，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$；

(3) x，$\frac{x^2}{2}$，$\frac{x^3}{6}$，$\frac{x^4}{24}$；

(4) $10p(1-p)^9$，$45p^2(1-p)^8$，$120p^3(1-p)^7$，$210p^4(1-p)^6$；

(5) 1，$\frac{3}{2}$，$\frac{11}{6}$，$\frac{25}{12}$；

(6) x，$x+2x^2$，$x+2x^2+3x^3$，$x+2x^2+3x^3+4x^4$。

3．285分.

4．41.04米.

5．1.5毫米.

6．2.

7．$n=4$，$a_n=27$。

10．325。

11．15.

12．(1) 2520；　　(2) 30240。

16．(1) $1+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{27}x^3+\frac{1}{81}x^4$；

(2) $\frac{1}{64}+\frac{1}{8}a+\frac{5}{12}a^2+\frac{20}{27}a^3+\frac{20}{27}a^4+\frac{32}{81}a^5+\frac{64}{729}a^6$。

17．0.42。

第九章

第一节

1.

复　　数	实　部	虚　部	复　　数	实　部	虚　部
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{5}-2i$	$\sqrt{5}$	-2
$1+3i$	1	3	$-5i$	0	-5

3. (1) $2+2\sqrt{3}i$;　　(2) $0.6180-1.9022i$;

(3) $-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)$;　　(4) $3(1+\sqrt{3}i)$.

4. $5(\cos 0+i\sin 0)$,　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,　$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$\sqrt{13}(\cos 123°41'+i\sin 123°41')$.

5. (1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i(-\frac{\pi}{4})}$;

(2) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$, $2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$, $\sqrt{13}e^{i1.313\pi}$.

6.

复　数	$e^{i\frac{\pi}{8}}$	$e^{i(-\frac{\pi}{8})}$	$5e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$5e^{i\frac{7\pi}{6}}$
实　部	0.92388	0.92388	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{5\sqrt{3}}{2}$
虚　部	0.38268	-0.38268	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$

7. $e^{i2k\pi}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$,

$e^{i(\theta+2k\pi)}=\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$.

8. (1) $\pm 5\sqrt{2}i$;　　(2) $\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$;

(3) $\pm\frac{\sqrt{-b}i}{2a}$;　　(4) $\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

第 二 节

1. $\frac{1-i}{3}$;　$5\left(\frac{1}{2}+i\right)$;　$-2i$;　$-1-i$;　$\frac{1+i}{2}$.

2. 两向量关于 x 轴对称.

3. (1) $-1-2i$;　　(2) $-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}i$;

(3) $13-6i$;　　(4) $20-30i$;

(5) $\frac{4}{13}$;　　(6) $\frac{7}{29}+\frac{26}{29}i$;

(7) $-\frac{174}{169}+\frac{181}{169}i$;　　(8) $-\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i$;

(9) $\frac{4}{3}i$;　　(10) $-1+i$.

4. $i^{4k}=1$;　$i^{4k+1}=i$;　$i^{4k+2}=-1$;　$i^{4k+3}=-i$.　$(k=0, 1, 2, 3, \cdots)$

5. (1) $16e^{i\frac{5\pi}{12}}$;　　(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

6. (1) $\frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(-\frac{5}{12}\pi\right)}$;　　(2) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

(3) $e^{i(-2\theta)}$;　　(4) $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

7. (1) i;　　(2) 1.

8. (1) $2e^{i\frac{\frac{2}{3}+2k\pi}{4}}$ $(k=0, 1, 2, 3)$ 即 $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$;

(2) $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{8}}$ $(k=0, 1, 2, \cdots 7)$ 即 $\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$,

$\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$,

$\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

9. (1) $3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{i\pi}$, $3e^{i\frac{5\pi}{3}}$;

(2) 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$;

(3) $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

第 三 节

1. 模$=10\sqrt{5+\sqrt{6}+\sqrt{2}}\approx 29.78$,

   幅角$=\operatorname{arctg}\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}\approx 40°1'$.

2. 20.76.

3. $i=\sqrt{2}U\omega C\cos\left(\omega t+\varphi\right)$.

4. $\dfrac{\sqrt{2}U\omega C}{\sqrt{R^2\omega^2C^2+(\omega^2LC-1)^2}}\sin\left(\omega t+\operatorname{arctg}\dfrac{1-\omega^2LC}{R\omega C}\right)$.

5. $\dfrac{\sqrt{2(\omega^2L^2+R^2)}U}{R\omega L}\sin\left(\omega t+\varphi-\operatorname{arctg}\dfrac{R}{\omega L}\right)$.

复 习 题

2. $-6+8i$;　$\dfrac{19+17i}{13}$;　$3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $5e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$; $\sqrt{5}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$; $3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$; $3e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$.

4. (1) 模 6, 幅角$-\dfrac{\pi}{2}$; 模 $\sqrt{34}$, 幅角 59°2′; 模 $\sqrt{34}$, 幅角 120°58′.

   (2) 模 15, 幅角 $\dfrac{3\pi}{10}$; 模 1, 幅角 $\dfrac{5\pi}{8}$; 模 1, 幅角 $\dfrac{13\pi}{8}$.

8. (1) 1;　(2) $-i$;　(3) $2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{4}}$;　(4) $2^{-n}e^{i\left(-\frac{n\pi}{3}\right)}$;

   (5) $2^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{6k-1}{3n}\right)\pi}$　$(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$;　(6) $2^ne^{i\frac{n\pi}{6}}$;

   (7) $2^{n-\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{14n-15}{12}\right)\pi}$;　(8) $e^{i(-n\theta)}$.

9. (1) 模$=10\sqrt{5-\sqrt{6}-\sqrt{2}}\approx 10.66$,

   幅角$=239°3'$;

   (2) $10\sqrt{5-\sqrt{6}-\sqrt{2}}\sin(314t+239°3')$.

10. $i=22\sqrt{10}\sin(314t-26°34')$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝代数
作者＝《初等数学》编写组
页数＝４２２
ＳＳ号＝１０３４０５５４
出版日期＝１９７３年１０月第１版

前言
目录